Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 8 vom 24. Juni 2011

Natura non saltum facit.
[Die Natur macht keine Sprünge.]
Gottfried Wilhelm Leibniz, *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand*

Aufgabe 1 (Stetigkeit)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind in 0 stetig? Skizzieren Sie die Abbildungen jeweils und begründen Sie Ihre Antwort!

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^{2012}+2011} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2011, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} |x|, & \text{falls } x < 0 \\ x^2, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } 1/x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Komposition stetiger Abbildungen)**.** Seien X, $Y \subset \mathbb{R}$ und seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen mit $f(X) \subset Y$.

1. Zeigen Sie, dass die Komposition $g \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig ist.
2. Zeigen Sie mit einer anderen Charakterisierung von Stetigkeit als der, die Sie im ersten Teil verwendet haben, dass die Komposition $g \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig ist.

Aufgabe 3 (Stetigkeit und offene/abgeschlossene Mengen)**.** Einbliz und Nonewt führen einen offenen Diskurs über Stetigkeit:

Nonewt Ah – die Charakterisierung stetiger Abbildungen über offene Mengen ist ein Musterbeispiel an Eleganz und wird nur durch meine folgende Entdeckung übertroffen: Ist $X \subset \mathbb{R}$ und ist $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt für alle $A \subset \mathbb{R}$: ist A abgeschlossen in $\mathbb{R}$, so ist das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Einbliz Du musst schon korrekt negieren! Richtig wäre nämlich: Ist $X \subset \mathbb{R}$ und ist $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt für alle $A \subset X$: ist A abgeschlossen in X, so ist $f(A)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Können Sie weiterhelfen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Charakterisierung unendlicher Mengen)**.**

1. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$, so gibt es keine surjektive Abbildung $\mathbb{N}_{<n} \longrightarrow \mathbb{N}$. (Also ist $\mathbb{N}$ unendlich).

2. Zeigen Sie: Ist X unendlich, so ist $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

   Hinweis. Definieren Sie induktiv eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow X$; strenggenommen geht hier das Auswahlaxiom ein – Sie brauchen auf diesen Punkt aber nicht einzugehen.

3. Zeigen Sie: Sind X und Y nicht-leere Mengen, so gibt es genau dann eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$, wenn es eine surjektive Abbildung $Y \longrightarrow X$ gibt.

   Hinweis. Strenggenommen geht hier das Auswahlaxiom ein (Bonus: wo verwenden Sie das Auswahlaxiom in Ihrem Beweis?).

4. Folgern Sie: Sind X und Y Mengen mit $|X| \leq |Y|$ und ist X unendlich, so ist auch Y unendlich.

Bonusaufgabe (Unstetigkeitsstellen)**.** Commander Blorx plant einen Ausflug in die Galaxie M'Ueberal-End und lässt sich die Route mit der Navigationshilfe Loop-Mage-GS planen. Die Routenbeschreibung ist recht lang und übersichtlich; beim ersten Überfliegen stellt Blorx nur fest, dass er nach genau 2011 Stunden am Ziel ankommen wird und dass der Abstand zum Ziel während des Flugs monoton fallend ist. Jede Unstetigkeitsstelle des Abstands zum Ziel entspricht einem Hypersprung durch ein Portal; allerdings ist für jeden solchen Sprung eine gesonderte Genehmigung nötig. Wegen eines Zwischenfalls mit einer Gruppe von Umweltaktivisten ist es Blorx jedoch nur gelungen, abzählbar unendlich viele solcher Genehmigungen zu drucken.

Können die Anwohner von M'Ueberal-End nun darauf hoffen, dass ihnen der Besuch von Commander Blorx erspart bleibt?

Abgabe bis zum 1. Juli 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen