Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 9 vom 1. Juli 2011

The lunatic, the lover, and the poet are of imagination all compact
William Shakespeare, *Midsummer Night's Dream*

Aufgabe 1 (Wurzeln)**.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Wurzeln:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $m, m' \in \mathbb{N}$ und alle $n, n' \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $m/n = m'/n'$ gilt
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}.$$
(Insbesondere zeigt dies, dass die Definition von x^a für alle $a \in \mathbb{Q}$ aus der Vorlesung wohldefiniert ist).

2. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt
$$x^a = \exp(a \cdot \ln x).$$

Aufgabe 2 (Der Brouwersche Fixpunktsatz in Dimension 1)**.**

1. Zeigen Sie: Ist $f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.
2. Geben Sie eine anschauliche Interpretation dieses Sachverhalts, z.B. anhand einer Schlange, die einen Meter lang ist, und auf einem einen Meter langen Ast liegt.

Aufgabe 3 (Abgeschlossenheit und Approximation)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann in X abgeschlossen ist, wenn folgendes gilt: Für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, die in $\mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert aus X konvergieren, liegt $\lim_{n \to \infty} a_n$ bereits in A.

Aufgabe 4 (Quantorensalat und Stetigkeit)**.** Einbliz und Nonewt können erneut nicht die Finger davon lassen, Quantoren zu vertauschen:

Einbliz Das ε-δ-Kriterium wird im allgemeinen viel zu kompliziert formuliert; viel einfacher und übersichtlicher ist doch das folgende: Sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann ist eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann auf X stetig, wenn folgendes gilt:
$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} \ \exists_{\delta \in \mathbb{R}_{>0}} \ \forall_{a,x \in X} \ \bigl(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\bigr).$$

Nonewt Ich vertausch' doch auch nicht einfach die Buchstaben in Deinem Namen und behaupte, es wäre dasselbe. Im allgemeinen darf man natürlich die Quantoren nicht einfach so vertauschen und es gibt tatsächlich stetige Funktionen, die Deine Charakterisierung nicht erfüllen; interessanterweise stimmt Deine Charakterisierung aber, wenn X kompakt ist!

Können Sie weiterhelfen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Eindeutigkeit der Exponentialfunktion)**.** Commander Blorx benötigt dringendst die Pläne für den brandneuen Antrieb Thurbeau Irrssch. Zu seinem Bedauern sind die Pläne mit der Verschlüsselungstechnologie Gemain verschlüsselt. Blorx sammelt all seinen Charme und bequatscht den Erfinder; dieser möchte seine revolutionäre Idee natürlich nicht preisgeben, lässt sich jedoch dazu hinreißen zu verraten, dass Gemain aus einer stetigen Abbildung $E\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $E(1) = e$ ist, besteht.

Blorx schließt messerscharf, dass es sich bei E um die Exponentialfunktion handelt und entschlüsselt damit die Pläne. Mit sich und der Welt zufrieden schickt er dem Erfinder folgende Nachricht: „Kehehe, Du hättest mal besser nicht verraten, dass das Ding stetig ist!"

Wie konnte Blorx zeigen, dass E die Exponentialfunktion ist? *Zusatz:* Wäre Blorx wirklich aufgeschmissen gewesen, wenn er nicht gewusst hätte, dass E stetig ist?

Abgabe bis zum 8. Juli 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen