Klausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 8. August 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	12	8	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann

$$(A \vee \neg B) \Longrightarrow \neg(A \wedge B)$$

   eine aussagenlogische Tautologie?

2. Gilt für alle Mengen A und B mit $A \subset B$, dass $P(A) \subset P(B)$ ist?

3. Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in A$ und

$$\forall_{n \in A} \quad (n + 1 \in A) \vee (n - 1 \in A)$$

   Gilt dann bereits $A = \mathbb{N}$?

4. Ist die Relation $\big\{(m, n) \bigm| (m, n \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq n + 2)\big\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ transitiv?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und für alle $a \in A$ gelte $a < 0$. Ist dann $\sup A < 0$?
2. Erfüllt jede (in $\mathbb{R}$) divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die folgende Eigenschaft?
$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$
3. Konvergiert die Folge $(e^{\frac{1}{n^2}})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$?
4. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\right)^n$ in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f([0,1]) = [0,2] \setminus \{1\}$?
2. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f([0,1]) = \mathbb{R}_{>0}$?
3. Ist jede stetige und streng monotone Funktion $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ surjektiv?
4. Ist die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x^2+1) < x\}$ in $\mathbb{R}$ offen?

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!
2. Formulieren Sie den Satz über partielle Integration!
3. Beweisen Sie den Satz über partielle Integration mit Hilfe des (zweiten) Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 5 $(3+5+4=12$ Punkte$)$**.**

1. Geben Sie die Definition der Funktionen $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an.
2. Beweisen Sie, dass $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\sin' = \cos$ ist.
3. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie $\int_0^1 \sin x \cdot \cos x \; dx$.

Aufgabe 6 (4 + 4 = 8 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2^{x-1} \cdot (x^2+1). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, und berechnen Sie die Ableitung von f.

2. Gibt es eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g' = f$, die außerdem $g(0) = 1$ und $g(1) = 0$ erfüllt?

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass keine Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(0) = 0 = f(1)$ existiert, die stetig ist und jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt.