Analysis I im SS 2011 – Kurzskript

Prof. Dr. C. Löh Sommersemester 2011

Inhaltsverzeichnis

Version vom 15. November 2011
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

-2 Literaturhinweise

Die folgenden Listen enthalten eine kleine Auswahl an Literatur zu Grundlagen der Mathematik (insbesondere Logik und Mengenlehre) und zur Analysis.

Analysis

[1] O. Forster. *Analysis 1*, neunte überarbeitete Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

[2] S. Lang. *Undergraduate Analysis*, zweite Auflage, Springer, 2010.

[3] M. Spivak. *Calculus*, dritte Auflage, Cambridge University Press, 2006.

[4] R.S. Strichartz. *The Way of Analysis*, Jones & Bartlett Learning, 2000.

[5] W. Walter. *Analysis 1*, siebte Auflage, 2009.

Grundlagen

[6] A. Beutelspacher. *„Das ist o.B.d.A. trivial!“*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

[7] A. Doxiadis, C. Papadimitriou, A. Papadatos, A. Di Donna, *Logicomix: An epic search for truth*, Bloomsbury Publishing, 2009.

[8] H.-D. Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*, dritte Auflage, BI Wissenschaftsverlag, 1994.

[9] H.-D. Ebbinghaus et al.. *Zahlen*, dritte Auflage, Springer, 1992.

[10] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*, vierte Auflage, Spektrum, 1996.

[11] U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985.

[12] R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010.

Weiterführende Themen

[13] M. Aigner, G. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*, vierte Auflage, Springer, 2009.

[14] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2008.

Das griechische Alphabet

Symbol		Name	TEX-/LATEX-Kommando	
Α	α	alpha	A	\alpha
Β	β	beta	B	\beta
Γ	γ	gamma	\Gamma	\gamma
Δ	δ	delta	\Delta	\delta
Ε	ε, ϵ	epsilon	E	\varepsilon , \epsilon
Ζ	ζ	zeta	Z	\zeta
Η	η	eta	H	\eta
Θ	ϑ, θ	theta	\Theta	\vartheta , \theta
Ι	ι	iota	I	\iota
Κ	κ	kappa	K	\kappa
Λ	λ	lambda	\Lambda	\lambda
Μ	μ	my	M	\mu
Ν	ν	ny	N	\nu
Ξ	ξ	xi	\Xi	\xi
Ο	o	omikron	O	o
Π	π	pi	\Pi	\pi
Ρ	ϱ, ρ	rho	P	\varrho , \rho
Σ	σ, ς	sigma	\Sigma	\sigma , \varsigma
Τ	τ	tau	T	\tau
Υ	υ	ypsilon	Y	\upsilon
Φ	φ, ϕ	phi	\Phi	\varphi , \phi
Χ	χ	chi	X	\chi
Ψ	ψ	psi	\Psi	\psi
Ω	ω	omega	\Omega	\omega

-1 Einführung

Was ist Mathematik?

Mathematik beschäftigt sich mit dem Studium abstrakter Strukturen und Modelle (z.B. Arithmetik, Geometrie) und formalen Methoden, sowie Anwendungen dieser Theorie.

Grob gesagt, besteht die Mathematik aus den folgenden Gebieten: Logik, Mengenlehre, Algebra, Analysis, Geometrie, Kombinatorik. Logik und Mengenlehre bilden die Grundlage der modernen Mathematik; die vier zentralen Gebiete Algebra, Analysis, Geometrie und Kombinatorik sind auf vielfältige Weise miteinander verbunden.

Was ist Analysis?

Analysis ist das Studium lokaler und globaler Eigenschaften von reell- bzw. komplexwertigen Funktionen; insbesondere ist zunächst zu klären, was die reellen Zahlen sind.

Beispiele für lokale Eigenschaften sind Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit; Beispiele für globale Probleme sind die Bestimmung von (globalen) Extremwerten oder Integralen.

0 Grundlagen: Logik und Mengenlehre

Die mathematische Logik beschreibt die „Spielregeln", auf denen die Mathematik basiert; die Mengenlehre beschreibt das „Spielfeld" bzw. die grundlegenden Bausteine, aus denen mathematische Objekte konstruiert werden.

Der stringente simultane Aufbau von Logik und Mengenlehre als Grundlage der modernen Mathematik ist zu aufwendig, um zu Beginn des Studiums im Detail ausgeführt zu werden. Wir werden uns daher im folgenden auf ein paar Einblicke beschränken, die die für den mathematischen Alltag wichtigsten Punkte behandeln.

Logische Grundlagen

Die mathematische Logik beschäftigt sich mit den folgenden (miteinander zusammenhängenden) Fragen:

- Wie kann man die mathematische Sprache formalisieren?
- Was ist eine „wahre" mathematische Aussage?
- Was ist ein Beweis?
- Was kann man beweisen? Gibt es Grenzen der Beweisbarkeit?

Wir folgen im folgenden dem allgemeinen Prinzip, mit einfachen Teilaspekten zu beginnen und dann Schritt für Schritt daraus komplexere Strukturen und Theorien aufzubauen („divide and conquer").

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist ein einfaches logisches System, das die Grundlagen des logischen Denkens formalisiert. Aussagenlogik besteht aus einer syntaktischen und einer semantischen Ebene:

- *Syntax aussagenlogischer Formeln.*
  - Aussagenlogische Variablen sind aussagenlogische Formeln.
  - Sind A und B aussagenlogische Formeln, so auch

$$(\neg A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Longrightarrow B), \quad (A \Longleftrightarrow B).$$

  - Keine weiteren Symbolketten sind aussagenlogische Formeln.

  [Falls keine Missverständnisse möglich sind, setzt man zur besseren Lesbarkeit manchmal Klammern etwas freizügiger.]
- *Semantik aussagenlogischer Formeln.*
  - Variablen können mit den Wahrheitswerten w („wahr") bzw. f („falsch") belegt werden.
  - Belegen wir alle in einer aussagenlogischen Formel vorkommenden Variablen mit w bzw. f (wobei verschiedene Auftreten derselben Variablen in einer Formel denselben Wert erhalten müssen), so erhalten wir einen Wahrheitswert, indem wir Schritt für Schritt die folgenden semantischen Regeln („Wahrheitstafeln") anwenden:

A	$\neg A$ „nicht“
w	f
f	w

(insbesondere nehmen wir *tertium non datur* an)

A	B	$A \wedge B$ „und“	$A \vee B$ „oder“	$A \Longrightarrow B$ „impliziert“	$A \Longleftrightarrow B$ „gilt genau dann, wenn“
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Definition 0.1 (Tautologie)**.** Eine aussagenlogische Formel A ist eine *(aussagenlogische) Tautologie*, wenn sich unter allen möglichen w/f-Belegungen aller auftretenden aussagenlogischen Variablen in A der Wert w ergibt.

Beispiel 0.2. Für alle aussagenlogischen Formeln A und B sind

$$
\begin{aligned}
(A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A) && \text{Kontraposition}\\
(A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow \bigl((\neg A) \vee B\bigr) &&\\
\bigl((\neg A) \Longrightarrow (B \wedge \neg B)\bigr) &\Longrightarrow A && \text{reductio ad absurdum}\\
\neg(A \wedge B) &\Longleftrightarrow \bigl((\neg A) \vee (\neg B)\bigr) && \text{de Morgansche Regeln}\\
\neg(A \vee B) &\Longleftrightarrow \bigl((\neg A) \wedge (\neg B)\bigr) && \text{de Morgansche Regeln}
\end{aligned}
$$

aussagenlogische Tautologien (kann z.B. über entsprechende Wahrheitstafeln nachgewiesen werden).

Caveat 0.3. Es gibt Zweige der Mathematik/Informatik, in denen das *tertium non datur* nicht als Axiom angenommen wird; inbesondere steht in solchen Kontexten der Widerspruchsbeweis (*reductio ad absurdum*) nicht als Beweistechnik zur Verfügung!

Quantorenlogik

Im allgemeinen wollen wir nicht nur über Wahrheitswerte sprechen. Daher verfeinern/erweitern wir die Aussagenlogik zu einer umfangreicheren Sprache, der Quantorenlogik. Eine exakte Definition würde an dieser Stelle zu weit führen; wir begnügen uns daher mit einer pragmatischen, vereinfachten Darstellung:

Sei dazu im folgenden T eine mathematische Sprache/Theorie (z.B. die Theorie der natürlichen Zahlen oder ähnliches).

- *Syntax quantorenlogischer Aussagen.*
  - „Atomare Aussagen“ aus der Theorie T sind quantorenlogische Aussagen über T; diese dürfen auch Variablen enthalten.
  - Ist A eine quantorenlogische Aussage über T und ist x eine (in A „freie“) Variable, so sind auch

    $$\bigl(\forall x\ A(x)\bigr) \qquad \text{bzw.} \qquad \bigl(\exists x\ A(x)\bigr)$$

    quantorenlogische Aussagen über T.

- Sind A und B quantorenlogische Aussagen über T, so auch

$$\neg(A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Longrightarrow B), \quad (A \Longleftrightarrow B).$$

- Keine weiteren Symbolketten sind quantorenlogische Aussagen über T.

– *Semantik aussagenlogischer Aussagen.*[1] Die Semantik von $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ wird analog zur Aussagenlogik definiert. Zusätzlich gelten die folgenden Interpretationen:

$$\begin{array}{rll} \forall x\ A(x) & \text{gilt genau dann, wenn:} & \text{für alle } x \text{ gilt } A(x) \\ \exists x\ A(x) & \text{gilt genau dann, wenn:} & \text{es existiert (mindestens) ein } x \text{ mit } A(x) \\ \neg(\forall x\ A(x)) & \text{gilt genau dann, wenn:} & (\exists x\ \neg A(x)) \\ \neg(\exists x\ A(x)) & \text{gilt genau dann, wenn:} & (\forall x\ \neg A(x)) \end{array}$$

Caveat 0.4. Im allgemeinen darf die Reihenfolge von Quantoren *nicht* vertauscht werden! Man betrachte dazu zum Beispiel die quantorenlogischen Aussagen

$$\forall x\ \exists y\ A(x,y) \qquad \text{bzw.} \qquad \exists y\ \forall x\ A(x,y),$$

wobei $A(x,y)$ bedeute, dass x eine Frau ist, y ein Mann und x eine Affäre mit y hat.

Caveat 0.5. Formeln wie „$A(x)\ \forall x$“ machen keinen Sinn (selbst wenn es die deutsche Sprache manchmal nahe legt …)!

Was ist ein Beweis?

Wir beschreiben im folgenden den klassischen Beweiskalkül der Mathematik; er ist eine Formalisierung der gängigen logischen Schlussweisen.

Gegeben seien

- eine mathematische Sprache/Theorie T,
- Axiome/Voraussetzungen V (gegeben durch quantorenlogische Aussagen über T),
- eine Behauptung B (d.h. eine quantorenlogische Aussage über T).

Der Nachweis, dass B logisch aus V folgt, wird in Form eines Beweises gegeben. Ein *Beweis* von B aus V über T ist dabei eine endliche Folge von quantorenlogischen Aussagen über T mit folgenden Eigenschaften: Jede dieser Aussagen ist

- ein Axiom (d.h. eine Aussage aus V), [2]
- oder ein quantorenlogisches Axiom
  [die quantorenlogischen Axiome sind:
  - für alle Formeln t in T (die beim Einsetzen keine „ungewollten“ Variablenbindungen erzeugen):

$$\bigl(\forall x\ A(x)\bigr) \Longrightarrow A(t)$$

  - für alle quantorenlogischen Aussagen A und A':

$$\bigl(\forall x\ (A \Longrightarrow A'(x))\bigr) \Longleftrightarrow \bigl(A \Longrightarrow \forall x\ A'(x)\bigr)$$

  (wobei x nicht frei in A vorkommen darf).],

[1] Dabei können quantorenlogische Aussagen aber nur dann auf einen Wahrheitswert reduziert werden, wenn sie keine freien Variablen enthalten.

[2] oder ein identitätslogisches Axiom; darauf soll hier aber nicht eingegangen werden.

- oder eine aussagenlogische Tautologie über T
  [d.h. eine aussagenlogische Tautologie, in der alle aussagenlogischen Variablen durch quantorenlogische Aussagen über T ersetzt werden],

oder

- man erhält sie aus vorherigen Aussagen des Beweises mit Hilfe des *Modus Ponens*[3]: Enthalten die vorherigen Aussagen eine Aussage der Form $A \Longrightarrow A'$ und die Aussage A, so kann man A' zum Beweis hinzufügen.

und die letzte Aussage ist B.

Im Normalfall werden Beweise natürlich nicht in dieser Form aufgeschrieben, sondern sprachlich poliert und vereinfacht.

Bemerkung 0.6. Häufig werden die folgenden Beweisschemata verwendet:

- *Beweis von Äquivalenzen.* Oft zerlegt man den Beweis von Aussagen der Form „Es gilt A genau dann, wenn B gilt." in den Beweis von „Wenn A gilt, dann gilt auch B." und „Wenn B gilt, dann gilt auch A". Dies leitet sich von der aussagenlogischen Tautologie
  $$(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow \big((A \Longrightarrow B) \land (B \Longrightarrow A)\big)$$
  ab.
- *Widerspruchsbeweis.* Kann man aus der Annahme, dass die Aussage $\neg A$ gilt, einen Widerspruch (also eine Aussage der Form $B \land \neg B$) ableiten, so folgt, dass A gilt. Dies leitet sich von der aussagenlogischen Tautologie
  $$\big((\neg A) \Longrightarrow (B \land \neg B)\big) \Longrightarrow A$$
  ab (*reductio ad absurdum*).

Mengentheoretische Grundlagen

Die Mengenlehre beschreibt die grundlegenden Bausteine, aus denen alle mathematischen Objekte aufgebaut sind.

Naive Mengenlehre

Wir beginnen mit der sogenannten naiven Mengenlehre, die auf folgender Begriffsbildung beruht:

„Definition" 0.7 (Cantor, 1895)**.** Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Caveat 0.8. Obige „Definition" ist *keine* Definition im mathematischen Sinne, da einige der auftretenden Begriffe nicht erklärt sind (bzw. nicht erklärbar sind). Wir werden zunächst mit diesem naiven Mengenbegriff arbeiten und erst später auf einen exakten Zugang eingehen.

[3] oder der Generalisierungsregel; auf diese soll hier aber nicht eingegangen werden. (Die Generalisierungsregel beschreibt, wann der Allquantor „$\forall$" eingeführt werden darf.)

Definition 0.9 (Gleichheit von Mengen)**.** Zwei Mengen sind genau dann *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Bemerkung 0.10 (Beweis von Gleichheit von Mengen)**.** Um zu beweisen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, ist also zu zeigen, dass alle Elemente von A in B liegen und dass alle Elemente von B in A liegen.

Notation 0.11 (Grundlegende Notationen in der Mengenlehre)**.** Im folgenden seien A und B Mengen.

Notation	*Bedeutung/Definition*
$x \in A$	x ist ein Element von A
$A \subset B$	A ist eine *Teilmenge* von B, d.h. alle Elemente von A sind Elemente von B
$\{x, y, z, \dots\}$	die Menge mit den Elementen $x, y, z, \dots$
$\{x \mid C(x)\}$	die Menge aller x, für die $C(x)$ gilt
$A \cap B$	die *Schnittmenge* von A und B, d.h. die Menge[4] $A \cap B := \big\{x \bigm\vert (x \in A) \wedge (x \in B)\big\}$
$A \cup B$	die *Vereinigung* von A und B, d.h. die Menge $A \cup B := \big\{x \bigm\vert (x \in A) \vee (x \in B)\big\}$
$A \setminus B$	das *Komplement* von B in A (oder A *ohne* B), d.h. die Menge[5] $A \setminus B := \big\{x \bigm\vert (x \in A) \wedge (x \notin B)\big\}$
$\emptyset$ oder $\{\}$	die *leere Menge*, d.h. die Menge, die keine Elemente enthält
$P(A)$	die *Potenzmenge* von A, d.h. die Menge aller Teilmengen von A: $P(A) := \{x \mid x \subset A\}$

Caveat 0.12. Es ist $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$, denn $\{\emptyset\}$ enthält ein Element (nämlich $\emptyset$), aber $\emptyset$ enthält keine Elemente.

Definition 0.13 (Disjunkt)**.** Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 0.14 (Eigenschaften der Mengenoperationen)**.** *Seien A, B, C Mengen.*

1. *Ist $A \subset B$ und $B \subset C$, so folgt $A \subset C$.*
2. *Es gilt (*Kommutativität *von „$\cup$“ bzw. „$\cap$“)*

$$A \cup B = B \cup A \quad \textit{und} \quad A \cap B = B \cap A.$$

3. *Es gilt (*Assoziativität *von „$\cup$“ bzw. „$\cap$“)*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \textit{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

[4]Hierbei bedeutet „$x := y$“, dass x durch y definiert wird.
[5]Hierbei ist „$x \notin B$“ eine Abkürzung für „$\neg(x \in B)$“.

4. Es gilt

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Notation 0.15. Ist A eine Menge, so schreiben wir auch oft

$$„\forall_{x \in A} \quad \dots \text{“} \quad \text{statt} \quad „\forall x \; \bigl((x \in A) \Longrightarrow \dots\bigr)\text{“}$$
$$„\{x \in A \mid \dots\}\text{“} \quad \text{statt} \quad „\bigl\{x \bigm| (x \in A) \wedge \dots\bigr\}\text{“}.$$

Caveat 0.16 (Russellsches Paradoxon)**.** Die Betrachtung von

$$\{x \mid x \text{ ist eine Menge und } x \notin x\}$$

führt zu einem Widerspruch! Man darf also nicht wie in Cantors „Definition“ von Mengen *alle* Konstrukte als Mengen zulassen. Ein möglicher Ausweg ist, ein zweistufiges System einzuführen (s.u.).

Abbildungen

Es ist ein allgemeines Prinzip in der Mathematik, nicht nur Objekte zu betrachten, sondern auch zu studieren, wie gewisse Objekte zueinander in Beziehung stehen; im Fall der Mengenlehre sind die Objekte Mengen und die „Beziehungen“ sind Abbildungen:

„Definition“ 0.17 (Abbildung)**.** Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* $X \longrightarrow Y$ ordnet jedem Element aus X genau ein Element aus Y zu.

Caveat 0.18. Dies ist *keine* mathematische Definition, denn „zuordnen“ besitzt keine mathematisch exakte Bedeutung!

Definition 0.19 (Abbildung)**.** Seien X und Y Mengen.

- Eine *Abbildung* $X \longrightarrow Y$ ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$; man schreibt in diesem Fall $f(x) := y$.
- Zwei Abbildungen $f,\ g\colon X \longrightarrow Y$ sind genau dann *gleich*, wenn die zugehörigen Teilmengen von $X \times Y$ gleich sind, d.h., wenn für alle $x \in X$ gilt, dass

$$f(x) = g(x).$$

Definition 0.20 (Identität)**.** Sei X eine Menge. Die *Identität (auf X)* ist die wie folgt definierte Abbildung id_X:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X \colon X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

(D.h. id_X ist durch die Teilmenge $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ gegeben.)

Definition 0.21 (Komposition von Abbildungen)**.** Seien X, Y, Z Mengen und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Die *Komposition von g mit f* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g\bigl(f(x)\bigr). \end{aligned}$$

Bemerkung 0.22. Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für alle Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$, $h\colon Z \longrightarrow U$ gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Definition 0.23 (Einschränkung von Abbildungen)**.** Seien X und Y Mengen, sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Die *Einschränkung von f auf A* ist die Abbildung $f|_A$, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} f|_A\colon A &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Definition 0.24 (Bild/Urbild)**.** Seien X und Y Mengen und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

- Ist $A \subset X$, so ist $f(A) := \bigl\{f(x) \bigm| x \in A\bigr\} \subset Y$ das *Bild von A unter f*.
- Ist $B \subset Y$, so ist $f^{-1}(B) := \bigl\{x \in X \bigm| f(x) \in B\bigr\} \subset X$ das *Urbild von B unter f*.

Definition 0.25 (Injektiv/surjektiv/bijektiv)**.** Seien X und Y Mengen.

- Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist *surjektiv*, wenn $f(X) = Y$ ist, d.h., wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
- Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist *injektiv*, wenn jedes Element aus Y höchstens ein Urbild unter f besitzt, d.h., wenn für alle $x, x' \in X$ gilt: Ist $f(x) = f(x')$, so ist $x = x'$.
- Eine Abbildung $X \longrightarrow Y$ ist *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist (d.h., wenn jedes Element aus Y genau ein Urbild unter dieser Abbildung besitzt).

Caveat 0.26. Injektiv ist *nicht* das „Gegenteil“ von surjektiv!

Definition 0.27 (Umkehrabbildung/inverse Abbildung)**.** Seien X und Y Mengen und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ ist eine *Umkehrabbildung/inverse Abbildung* von f, wenn

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

Proposition 0.28 (Umkehrabbildungen und Bijektivität)**.** *Seien X und Y Mengen und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

1. *Ist f bijektiv, so besitzt f eine Umkehrabbildung; außerdem ist die Umkehrabbildung von f eindeutig bestimmt.*
2. *Besitzt f eine Umkehrabbildung, so ist f bijektiv.*

Axiomatische Mengenlehre

Was ist axiomatische Mengenlehre? Statt wie in Cantors Definition anzugeben, *was* eine Menge ist, beschreibt man die Mengenlehre durch eine Liste von Axiomen, die angeben, *wie* man mit Mengen umgehen kann.

Wir geben im folgenden die *Axiome für die Mengenlehre nach von Neumann, Bernays und Gödel* an[6]: Es gibt zwei Sorten von Objekten, *Mengen* und *Klassen*; man sollte sich dabei Mengen als „kleine Klassen" vorstellen. Nach dem Komprehensionsaxiom darf man Klassen sehr freizügig zusammenstellen – aber nicht jede Klasse ist eine Menge!

Axiome 0.29 (Axiome der Mengenlehre nach von Neumann, Bernays, Gödel)**.**
- Es gibt zwei Sorten von Objekten, *Mengen* und *Klassen.*
- Jede Menge ist eine Klasse.
- Elemente von Klassen sind Mengen.
- *Extensionalität.* Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- *Komprehension.* Ist C eine quantorenlogische Aussage „erster Stufe" in einer mengenwertigen Variablen und wird in C *nicht* über Klassenvariablen quantifiziert, so ist
$$\bigl\{x \bigm| x \text{ ist eine Menge und es gilt } C(x)\bigr\}$$
eine Klasse.
- Die *leere Klasse* $\emptyset := \{x \mid x \text{ ist eine Menge und } x \neq x\}$ ist eine Menge.
- Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge; eine Klasse A ist eine *Teilklasse* einer Klasse B, wenn jedes Element von A ein Element von B ist.
- *Paarmengenaxiom.* Sind A und B Mengen, so ist auch $\{A, B\}$ eine Menge.
- *Vereinigungsaxiom.* Ist A eine Menge, so ist auch
$$\bigcup A := \bigl\{x \bigm| \exists y\ ((x \in y) \wedge (y \in A))\bigr\}$$
eine Menge, die *Vereinigungsmenge von A.*
- *Potenzmengenaxiom.* Ist A eine Menge, so ist auch $P(A) := \{x \mid x \subset A\}$ eine Menge, die *Potenzmenge von A.*
- *Ersetzungsaxiom.* Ist $F\colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion zwischen den Klassen X und Y und ist $A \subset X$ eine Teil*menge*, so ist auch $F(A)$ eine Menge.
- *Unendlichkeitsaxiom.* Es gibt eine induktive Menge; eine Menge A heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in A$ und wenn für alle $x \in A$ auch $x \cup \{x\} \in A$ ist.
- *Auswahlaxiom.* Ist A eine Menge mit $\emptyset \notin A$, so gibt es eine *Auswahlfunktion für A*, d.h. eine Funktion $f\colon A \longrightarrow \bigcup A$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in A$ ist $f(x) \in x$.

Caveat 0.30. Man kann aus den Axiomen der Mengenlehre *nicht* folgern, dass die Mengenlehre widerspruchsfrei ist! (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz). Die

[6]Eine andere weitverbreitete Axiomatisierung stammt von Zermelo und Fraenkel; es ergibt sich dabei dieselbe Mengenlehre (jedoch ohne Klassen).

Mathematik beruht auf der *Annahme*, dass die Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind.

Caveat 0.31. Das Auswahlaxiom ist „unabhängig" von den anderen Axiomen der Mengenlehre. Aufgrund der Nicht-Konstruktivität und etwas ungewöhnlicher Konsequenzen wird im Normalfall explizit angegeben, wenn ein Beweis das Auswahlaxiom verwendet.

Proposition 0.32. *Es gibt eine echte Klasse (d.h. eine Klasse, die keine Menge ist), nämlich zum Beispiel* $\{x \mid x \text{ ist eine Menge und } x \notin x\}$.

1 Zählen, Zahlen, angeordnete Körper

Ziel dieses und des nächsten Kapitels ist es, zu verstehen, was die reellen Zahlen sind. Insbesondere werden wir uns zunächst mit den natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen beschäftigen. Im nächsten Kapitel werden wir den Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen studieren.

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen formalisieren das Zählen; zum Zählen benötigt man einen Startpunkt („null“), die Möglichkeit weiterzuzählen („+1“), und alle Anzahlen müssen auf diese Weise erreicht werden können. Genauer:

Axiome 1.1 (Peano-Axiome der natürlichen Zahlen)**.** Ein Tripel $(N, 0, s)$ erfüllt die Peano-Axiome, wenn N eine Menge ist, $0 \in N$ und $s\colon N \longrightarrow N$ eine Abbildung ist, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Es ist $0 \notin s(N)$.
- Die Abbildung $s\colon N \longrightarrow N$ ist injektiv.
- *Induktionsprinzip.* Ist $A \subset N$ eine Teilmenge mit $0 \in A$ und $s(A) \subset A$, so ist $A = N$.

Das zentrale Axiom ist das Induktionsprinzip; etwas expliziter kann es wie folgt formuliert werden:

Bemerkung 1.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** Sei $(N, 0, s)$ ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt. Sei E eine „Eigenschaft“ von Elementen von N (d.h. wir können E als Teilmenge von N auffassen), und es gelte:

- *Induktionsanfang.* Das Element 0 hat die Eigenschaft E.
- *Induktionsschritt.* Für alle $n \in N$ gilt: Hat n die Eigenschaft E, so auch $s(n)$.

Dann haben alle Elemente von N die Eigenschaft E.

Das Prinzip der vollständigen Induktion besitzt viele Varianten. Mit Hilfe des Induktionsprinzips lassen sich auch Abbildungen induktiv/rekursiv definieren:

Satz 1.3 (Rekursionssatz)**.** *Sei $(N, 0, s)$ ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt. Sei A eine Menge, sei $a \in A$ und sei $g\colon A \longrightarrow A$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f\colon N \longrightarrow A$ mit der Eigenschaft, dass $f(0) = a$ und, dass*

$$f\bigl(s(n)\bigr) = g\bigl(f(n)\bigr)$$

für alle $n \in N$ gilt.

Definition 1.4 (Addition/Multiplikation/Potenzen)**.** Sei $(N, 0, s)$ ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt und sei $m \in N$. Wir definieren die Abbildungen $m + \cdot\colon N \longrightarrow N$, $m \cdot \cdot\colon N \longrightarrow N$ und $m^{\cdot}\colon N \longrightarrow N$ mit Hilfe des Rekursionssatzes wie folgt:

- *Addition.* Es sei $m + 0 := m$ und für alle $n \in N$ sei $m + s(n) := s(m + n)$.
- *Multiplikation.* Es sei $m \cdot 0 := 0$ und für alle $n \in N$ sei $m \cdot s(n) := m \cdot n + m$.
- *Potenzen.* Es sei $m^0 := s(0)$ und für alle $n \in N$ sei $m^{s(n)} := m^n \cdot m$.

Proposition 1.5 (Eigenschaften von Addition/Multiplikation/Potenzen)**.** *Sei* $(N, 0, s)$ *ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt. Dann gilt:*

1. Neutrale Elemente. *Für alle* $n \in N$ *gilt*

$$n + 0 = n = 0 + n \qquad \text{und} \qquad n \cdot s(0) = n = s(0) \cdot n.$$

2. Assoziativität. *Für alle* $k, m, n \in N$ *gilt*

$$k + (m + n) = (k + m) + n \qquad \text{und} \qquad k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n.$$

3. Kommutativität. *Für alle* $m, n \in N$ *gilt*

$$m + n = n + m \qquad \text{und} \qquad m \cdot n = n \cdot m.$$

4. Distributivität. *Für alle* $k, m, n \in N$ *gilt*

$$(k + m) \cdot n = k \cdot m + k \cdot n.$$

5. Potenzgesetze. *Für alle* $k, m, n \in N$ *gilt*

$$(k \cdot m)^n = k^n \cdot m^n, \qquad (k^m)^n = k^{m \cdot n}, \qquad k^m \cdot k^n = k^{m+n}.$$

Satz 1.6.

1. *Es existiert ein Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt.*
2. *Je zwei Tripel, die die Peano-Axiome erfüllen, sind kanonisch isomorph; genauer: Erfüllen* $(N, 0, s)$ *und* $(N', 0', s')$ *die Peano-Axiome, so gibt es genau eine Bijektion* $f\colon N \longrightarrow N'$ *mit* $f(0) = 0'$ *und dass für alle* $n \in N$ *gilt, dass* $f(s(n)) = s'(f(n))$.

Der Beweis der ersten Aussage beruht auf dem Unendlichkeitsaxiom; der Beweis der zweiten Aussage beruht auf dem Rekursionssatz.

Definition 1.7 (Natürliche Zahlen)**.** Das (bis auf kanonische Isomorphie) eindeutige Tripel, das die Peano-Axiome erfüllt, bezeichnen wir mit $(\mathbb{N}, 0, \cdot + 1)$ und nennen es *natürliche Zahlen*.

Notation 1.8. Im Normalfall bezeichnen wir natürliche Zahlen durch ihre Dezimaldarstellung, d.h. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Caveat 1.9. In manchen Quellen wird die Konvention verwendet, dass die natürlichen Zahlen mit 1 beginnen. Achten Sie daher unbedingt darauf, welche Konvention jeweils verwendet wird!

Notation 1.10 ($\sum / \prod$)**.**

– Sei X eine Menge zusammen mit einer assoziativen und kommutativen Addition $+\colon X \times X \longrightarrow X$, die ein bezüglich Addition neutrales Element 0 enthält, und seien $x_0, x_1, \dots \in X$. Dann definieren wir „$\sum_{j=0}^{n} x_j$" für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv durch

$$\sum_{j=0}^{0} x_j := x_0$$

und
$$\sum_{j=0}^{n+1} x_j := \left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right) + x_{n+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $\sum_{j=0}^{n} x_j =$ „$x_0 + \dots + x_n$".

Ist $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir analog $\sum_{j=k}^{k+n} x_j =$ „$x_k + x_{k+1} + \dots + x_{k+n}$" (durch Induktion über n).

Sind $k, k' \in \mathbb{N}$ und gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $k + n = k'$, so sei $\sum_{j=k}^{k'} x_j := 0$.

– Analog: Sei X eine Menge zusammen mit einer assoziativen und kommutativen Multiplikation $\cdot\colon X \times X \longrightarrow X$, die ein bezüglich Multiplikation neutrales Element 1 enthält, und seien $x_0, x_1, \ldots \in X$. Dann definieren wir „$\prod_{j=0}^{n} x_j$" für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv durch
$$\prod_{j=0}^{0} x_j := x_0$$
und
$$\prod_{j=0}^{n+1} x_j := \left(\prod_{j=0}^{n} x_j\right) \cdot x_{n+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $\prod_{j=0}^{n} x_j =$ „$x_0 \cdot \dots \cdot x_n$".

Ist $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir analog $\prod_{j=k}^{k+n} x_j =$ „$x_k \cdot x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{k+n}$" (durch Induktion über n).

Sind $k, k' \in \mathbb{N}$ und gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $k + n = k'$, so sei $\prod_{j=k}^{k'} x_j := 1$.

Proposition 1.11. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*
$$2 \cdot \sum_{j=0}^{n} j = n \cdot (n+1).$$

Definition 1.12 (Fakultät)**.** Die *Fakultätsfunktion* ist wie folgt definiert:
$$\begin{aligned} \cdot\,!\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n! := \prod_{j=1}^{n} j = \text{„}1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n\text{"}. \end{aligned}$$
(Insbesondere ist $0! = 1$).

Proposition 1.13 (Addition auf $\mathbb{N}$, Kürzungsregeln)**.**

1. *Es gilt die folgende Kürzungsregel: Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $k + n = m + n$, so ist bereits $k = m$.*
2. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ besitzt einen Vorgänger, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m + 1 = n$.*
3. *Für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $n + n' = 0$, so ist $n = 0 = n'$.*
4. *Für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n + m = n'$ oder es existiert ein $m' \in \mathbb{N}$ mit $n' + m' = n$.*

Ganze Zahlen

Im allgemeinen sind für $m, n \in \mathbb{N}$ Gleichungen der Form

$$x + m = n$$

nicht mit $x \in \mathbb{N}$ lösbar. Wir erweitern daher die natürlichen Zahlen zu den sogenannten ganzen Zahlen; grob gesagt sind die ganzen Zahlen die „kleinste“ Gruppe, die die natürlichen Zahlen enthält.

Definition 1.14 (Gruppe)**.** Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot \colon G \times G \longrightarrow G$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein *neutrales Element* bezüglich „ $\cdot$ “, d.h. es existiert ein $e \in G$ mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ gilt

  $$g \cdot e = g = e \cdot g.$$

  [Das neutrale Element ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Außerdem ist insbesondere jede Gruppe nicht-leer.]
- Die Verknüpfung „ $\cdot$ “ ist *assoziativ*, d.h. für alle g, h, k gilt

  $$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

- Jedes Element besitzt ein *inverses Element* bezüglich der Verknüpfung „ $\cdot$ “, d.h. zu jedem $g \in G$ gibt es ein $h \in G$ mit

  $$g \cdot h = e = h \cdot g.$$

  [Inverse Elemente sind durch diese Bedingung eindeutig bestimmt; das inverse Element zu $g \in G$ bezeichnet man im Normalfall mit g^{-1}.]

Ist die Verknüpfung „ $\cdot$ “ außerdem kommutativ, d.h. gilt

$$g \cdot h = h \cdot g$$

für alle $g, h \in G$, so nennt man G eine *abelsche Gruppe*.

Satz 1.15 (Ganze Zahlen)**.** *Bis auf kanonische Isomorphie gibt es genau eine abelsche Gruppe* $(\mathbb{Z}, +)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Es ist* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ *und die Addition auf* $\mathbb{Z}$ *erweitert die Addition auf* $\mathbb{N}$.
- *Für alle* $x \in \mathbb{Z}$ *gilt* $x \in \mathbb{N}$ *oder* $-x \in \mathbb{N}$*; hierbei bezeichnet* $-x$ *das additive Inverse von* x *in* $\mathbb{Z}$.

Wir nennen $(\mathbb{Z}, +)$ *die* ganzen Zahlen.

Man kann die ganzen Zahlen zum Beispiel als Menge der formalen Differenzen von natürlichen Zahlen (bezüglich einer geeigneten Gleichheit) konstruieren. [Dies wird später in der Algebra im Detail ausgeführt.]

Notation 1.16 (Subtraktion)**.** Sind $x, y \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir

$$x - y := x + (-y).$$

Definition 1.17 (Multiplikation auf $\mathbb{Z}$)**.** Sind $x, x' \in \mathbb{Z}$, so definieren wir

$$x \cdot x' := m \cdot m' + n \cdot n' - (m \cdot n' + n \cdot m') \in \mathbb{Z},$$

wenn $x = m - n$ und $x' = m' - n'$ Darstellungen mit $m, m', n, n' \in \mathbb{N}$ sind; die Multiplikationen auf der rechten Seite beziehen sich auf die bereits definierte Multiplikation in $\mathbb{N}$.

[Man kann zeigen: Dies ist wohldefiniert, also unabhängig von den gewählten Darstellungen von x bzw. x'.]

Bemerkung 1.18 (Multiplikation auf $\mathbb{Z}$)**.**
1. Die oben definierte Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ setzt die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ fort.
2. Die oben definierte Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ hat 1 als neutrales Element, ist kommutativ und assoziativ und erfüllt (mit der Addition auf $\mathbb{Z}$) das Distributivgesetz.

Rationale Zahlen

Im allgemeinen sind für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ Gleichungen der Form

$$x \cdot b = a$$

nicht mit $x \in \mathbb{Z}$ lösbar. Wir erweitern daher die ganzen Zahlen zu den sogenannten rationalen Zahlen; grob gesagt sind die rationalen Zahlen der „kleinste“ Körper, der die ganzen Zahlen enthält.

Definition 1.19 (Körper)**.** Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit Abbildungen $+\colon K \times K \longrightarrow K$ und $\cdot\colon K \times K \longrightarrow K$ mit den folgenden Eigenschaften:
- Es ist $(K, +)$ eine abelsche Gruppe; wir bezeichnen das neutrale Element bezüglich der Addition „$+$“ mit 0.
- Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ gilt $x \cdot y \neq 0$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot\,|_{K\setminus\{0\}\times K\setminus\{0\}\to K\setminus\{0\}})$ ist eine abelsche Gruppe; wir bezeichnen das neutrale Element bezüglich „ $\cdot$ “ mit 1. [Insbesondere ist $K \setminus \{0\} \neq \emptyset$ und $1 \neq 0$.]
- *Distributivgesetz.* Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Satz 1.20 (Rationale Zahlen)**.** *Bis auf kanonische Isomorphie gibt es genau einen Körper* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*
- *Es ist* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ *und die Addition/Multiplikation auf* $\mathbb{Q}$ *setzt die Addition/Multiplikation auf* $\mathbb{Z}$ *fort.*
- *Für alle* $x \in \mathbb{Q}$ *gibt es ein* $a \in \mathbb{Z}$ *und ein* $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *mit* $x = a \cdot b^{-1}$.

Wir nennen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *die* rationalen Zahlen*.*

Man kann die rationalen Zahlen zum Beispiel als Menge der formalen Brüche von ganzen Zahlen mit nichtverschwindendem Nenner (bezüglich einer geeigneten Gleichheit) konstruieren. [Dies wird später in der Algebra im Detail ausgeführt.]

Notation 1.21 (Brüche)**.** Sind $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $y \neq 0$, so schreiben wir

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}.$$

[Man kann zeigen, dass die „gewöhnlichen" Bruchrechenregeln gelten.]

Ordnungen

Bisher haben wir auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nur algebraische Operationen betrachtet. Wir wollen aber auch über „Ungleichungen" und „Anordnungen" von Elementen sprechen können. Dies wird durch sogenannte Ordnungen formalisiert.

Ordnungen sind spezielle Relationen; Relationen sind ein wichtiges und allgemeines Konzept, das in allen Bereichen der Mathematik verwendet wird:

Definition 1.22 (Relation)**.** Sei X eine Menge.

- Eine *Relation auf* X ist eine Teilmenge von $X \times X$.
- Ist $\square \subset X \times X$ eine Relation auf X und sind $x, y \in X$, so schreiben wir genau dann $x \mathrel{\square} y$, wenn $(x, y) \in \square$ gilt.

Definition 1.23 (Eigenschaften von Relationen)**.** Sei X eine Menge und sei $\square \subset X \times X$ eine Relation auf X.

- Die Relation „$\square$" ist *reflexiv*, falls für alle $x \in X$ gilt, dass $x \mathrel{\square} x$.
- Die Relation „$\square$" ist *symmetrisch*, falls für alle $x, y \in X$ genau dann $x \mathrel{\square} y$ gilt, wenn $y \mathrel{\square} x$ gilt.
- Die Relation „$\square$" ist *anti-symmetrisch*, falls für alle $x, y \in X$ gilt: Ist $x \mathrel{\square} y$ und $y \mathrel{\square} x$, so ist $x = y$.
- Die Relation „$\square$" ist *transitiv*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt: Ist $x \mathrel{\square} y$ und $y \mathrel{\square} z$, so ist auch $x \mathrel{\square} z$.

Definition 1.24 ((Partielle) Ordnung)**.** Sei X eine Menge.

- Eine *partielle Ordnung* auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation auf X. Ist „$\leq$" eine partielle Ordnung auf X, so sagt man auch, dass $(X, \leq)$ eine *partiell geordnete Menge* ist.
- Eine *Ordnung* (oder: *totale Ordnung*) auf X ist eine partielle Ordnung „$\leq$" auf X, für die außerdem gilt: Für alle $x, y \in X$ ist $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Notation 1.25. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

- Dann definieren wir die Relation „$<$" auf X durch die Menge
$$\bigl\{(x, x') \bigm| (x \in X) \land (x' \in X) \land (x \leq x') \land (x \neq x')\bigr\} \subset X \times X.$$
- Sind $x, x' \in X$, so schreiben wir auch $x' \geq x$ für $x \leq x'$ bzw. wir schreiben auch $x' > x$ für $x < x'$.
- Ist $x \in X$, so schreiben wir
$$\begin{aligned} X_{\geq x} &:= \{x' \in X \mid x' \geq x\} \\ X_{\leq x} &:= \{x' \in X \mid x' \leq x\} \\ X_{>x} &:= \{x' \in X \mid x' > x\} \\ X_{<x} &:= \{x' \in X \mid x' < x\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.26. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $P(X)$ durch die Inklusionsrelation partiell geordnet; im allgemeinen ist dies aber keine totale Ordnung auf $P(X)$.

Definition 1.27 (Die Relationen „$\leq$“ auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)**.**

- Wir definieren die Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{N}$ durch die Menge

$$\bigl\{(n,n') \bigm| (n \in \mathbb{N}) \wedge (n' \in \mathbb{N}) \wedge \ (\exists_{m\in\mathbb{N}} \quad n+m=n')\bigr\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

  In anderen Worten: Sind $n, n' \in \mathbb{N}$, so gilt genau dann $n \leq n'$, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n+m=n'$ gibt.
- Wir definieren die Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{Z}$ durch die Menge

$$\bigl\{(x,x') \bigm| (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x' \in \mathbb{Z}) \wedge \ (\exists_{n\in\mathbb{N}} \quad x+n=x')\bigr\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

- Wir definieren die Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{Q}$ durch die Menge

$$\begin{aligned}\bigl\{(x,x') \bigm| &(x \in \mathbb{Q}) \wedge (x' \in \mathbb{Q}) \\ &\wedge\ \exists_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \quad \bigl((n\cdot x \in \mathbb{Z}) \wedge (n\cdot x' \in \mathbb{Z}) \wedge (n\cdot x \leq n\cdot x')\bigr)\bigr\} \subset \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Proposition 1.28.

1. *Es ist „$\leq$“ eine Ordnung auf* $\mathbb{N}$.
2. *Für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $n > 0$ und $n' > 0$, so ist auch $n \cdot n' > 0$.*

Proposition 1.29.

1. *Es ist „$\leq$ “ eine Ordnung auf* $\mathbb{Z}$.
2. *Es ist $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann $0 \leq x$, wenn $-x \leq 0$.*
3. *Für alle $x, x' \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $x \leq x'$, so ist auch $n \cdot x \leq n \cdot x'$.*

Proposition 1.30.

1. *Es ist „$\leq$“ eine Ordnung auf* $\mathbb{Q}$.
2. *Für alle $x, x', y \in \mathbb{Q}$ gilt:*
   - *Ist $x \leq x'$, so ist auch $x + y \leq x' + y$.*
   - *Ist $x \leq x'$ und $y > 0$, so ist $x \cdot y \leq x' \cdot y$.*
3. *Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$.*

Bemerkung 1.31 (Unterschiede zwischen den Ordnungen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)**.**

- Die Ordnung „$\leq$“ auf $\mathbb{N}$ erfüllt das *Wohlordnungsprinzip*, d.h. jede nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ enthält ein minimales Element (also ein Element $m \in A$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in A$ gilt, dass $m \leq n$). Das Wohlordnungsprinzip ist stark mit dem Induktionsprinzip und dem Rekursionssatz verwandt.
- Für alle $x, x' \in \mathbb{Q}$ mit $x < x'$ gibt es ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y < x'$, nämlich etwa $y = x/2 + x'/2$. Für $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gilt die analoge Aussage im allgemeinen nicht.

Im folgenden betrachten wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ immer mit den oben eingeführten Ordnungen (es sei denn, es wird explizit etwas anderes vereinbart).

Angeordnete Körper

Die rationalen Zahlen sind ein sogenannter archimedischer angeordneter Körper:

Definition 1.32 (Angeordneter Körper)**.** Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K mit einer Ordnung „$\leq$“ mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $x, x', y \in K$ gilt:

- Ist $x \leq x'$, so ist auch $x + y \leq x' + y$.
- Ist $x \leq x'$ und ist $y \geq 0$, so ist auch $x \cdot y \leq x' \cdot y$.

Caveat 1.33. Ist $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sind $x, x', y \in K$ mit $x \leq x'$ und $y < 0$, so gilt $x \cdot y \geq x' \cdot y$; d.h. Multiplikation mit negativen Elementen dreht Ungleichungen um!

Bemerkung 1.34. Auf dem Körper mit genau zwei Elementen gibt es *keine* Ordnung, die ihn zu einem angeordneten Körper macht.

Proposition 1.35 (Quadrate in angeordneten Körpern)**.** *Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt:*

1. *Für alle $x \in K$ ist $x^2 \geq 0$; dabei gilt genau dann $x^2 = 0$, wenn $x = 0$ ist.*
2. *Für alle $x, y \in K_{\geq 0}$ ist genau dann $x \leq y$, wenn $x^2 \leq y^2$ ist.*

Korollar 1.36 (Natürliche Zahlen in angeordneten Körpern)**.** *Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper.*

1. *Dann ist $0 < 1$ und $-1 < 0$; insbesondere ist -1* kein *Quadrat in K.*
2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} 1 \end{aligned}$$

ist injektiv. Wir fassen daher immer $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K auf.

Definition 1.37 (archimedisch)**.** Ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ heißt *archimedisch*, wenn es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$ gibt; hierbei betrachten wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K wie in Korollar 1.36.

Caveat 1.38. Es gibt angeordnete Körper, die *nicht* archimedisch sind!

Definition 1.39 (Betrag)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann definieren wir die *Betragsfunktion* auf K durch

$$\begin{aligned} |\cdot| \colon K &\longrightarrow K_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.40 (Eigenschaften des Betrags)**.** *Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten:*

1. *Für alle* $x \in K$ *ist* $x \leq |x|$ *und* $|x| = |-x|$.
2. *Für alle* $x \in K$ *ist* $|x|^2 = x^2$.
3. *Für alle* $x, y \in K$ *ist* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. *Es gilt die* Dreiecksungleichung, *d.h. für alle* $x, y \in K$ *ist*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \textit{und} \qquad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

2 Konvergenz und Vollständigkeit

Das grundlegende Konzept in der Analysis ist Approximation. Im folgenden werden wir den Approximations- bzw. Konvergenzbegriff formalisieren und insbesondere auch die reellen Zahlen einführen.

Warum kann man in $\mathbb{Q}$ keine Analysis machen?

Genauso wie die natürlichen Zahlen für die Algebra ungeeignet sind (da sie nicht unter Subtraktion/Division abgeschlossen sind), sind die rationalen Zahlen für die Analysis ungeeignet (da sie nicht unter Approximation abgeschlossen sind):

Proposition 2.1.
1. *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ gibt es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 \leq 2 < (x+\varepsilon)^2$.*
2. *Aber es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Wir wollen also (wie vorher bei den Erweiterungen von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$) die rationalen Zahlen zu eine angeordneten Körper erweitern, der unter Approximation abgeschlossen ist – dies wird die reellen Zahlen liefern.

Caveat 2.2. Es ist nicht möglich, die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen zu erhalten, indem man Lösungen von rationalen polynomialen Gleichungen zu $\mathbb{Q}$ hinzufügt! (Korollar 3.26). Der Schritt von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen ist kein algebraischer, sondern ein analytischer Schritt.

Cauchyfolgen und konvergente Folgen

Wir werden den Approximationsbegriff mit Hilfe von Folgen formalisieren:

Definition 2.3 (Folge)**.** Sei X eine Menge. Eine *Folge in X* ist eine Abbildung vom Typ $\mathbb{N} \longrightarrow X$.

Notation 2.4. Sei X eine Menge. Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Folge, die durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

gegeben ist.

Definition 2.5 (Cauchyfolge, Grenzwert, konvergente Folge)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K.

– Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchyfolge in K*, wenn folgendes gilt:

$$\forall_{\varepsilon\in K_{>0}} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon;$$

in Worten: Für jedes $\varepsilon \in K_{>0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: für alle $n,\ m \in \mathbb{N}_{\geq N}$ ist $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

– Ein Element $a \in K$ ist ein *Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\forall_{\varepsilon\in K_{>0}} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

– Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ist *konvergent in* K, wenn sie einen Grenzwert in K besitzt.
– Eine Folge in K heißt *Nullfolge*, wenn sie 0 als Grenzwert besitzt.

Caveat 2.6. Die Reihenfolge der Quantoren in der Definition von Cauchyfolge bzw. Konvergenz ist essentiell!

Proposition 2.7 (Grundlegende Eigenschaften von Cauchyfolgen)**.** *Sei* $(K, \leq)$ *ein angeordneter Körper. Dann gilt:*

1. *Jede Cauchyfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *ist* beschränkt, *d.h. es existiert ein* $a \in K$ *mit der Eigenschaft, dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, dass* $|a_n| \leq a$.
2. *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolgen in* K, *so sind auch*

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   Cauchyfolgen in K*; ist außerdem* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und ist* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge, so ist auch* $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* K.
3. *Ist* $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* K *und ist* $a \in K$, *so sind auch* $(a + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(a \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolgen in* K.

Proposition 2.8 (Grundlegende Eigenschaften von konvergenten Folgen)**.** *Sei* $(K, \leq)$ *ein angeordneter Körper.*

– *Jede in* K *konvergente Folge in* K *ist auch eine Cauchyfolge in* K.
– *Jede in* K *konvergente Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *besitzt genau einen Grenzwert in* K. *Wir schreiben dann*

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

  („Limes von a_n *für* n *gegen unendlich") für diesen Grenzwert.*
– *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *konvergente Folge in* K. *Dann sind* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *konvergente Folgen in* K *und es gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

  Gilt außerdem $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und ist* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge, so ist auch* $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine in* K *konvergente Folge in* K *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

– *Ist $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ eine in K konvergente Folge in K und ist $a \in K$, so sind auch $(a + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergente Folgen in K und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a + a_n) = a + \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a \cdot a_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Caveat 2.9. Nicht alle Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ konvergieren in $\mathbb{Q}$!

Vollständigkeit

Wie bereits angedeutet sind die rationalen Zahlen nicht unter Approximation abgeschlossen; formuliert in der Sprache der Cauchyfolgen bzw. konvergenten Folgen bedeutet dies:

Definition 2.10 (Vollständigkeit)**.** Ein angeordneter Körper $(K, <)$ ist *(Cauchy)vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in K einen Grenzwert in K besitzt.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind *nicht* vollständig in diesem Sinne, denn zum Beispiel ist die rekursiv durch $a_0 := 1$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ zwar eine Cauchyfolge, besitzt aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert.

Exkurs: Äquivalenzrelationen

Wir erhalten die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen, indem wir „formale Differenzen“ hinzufügen; analog erhalten wir die rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen, indem wir „formale Quotienten“ hinzufügen. Wir werden zeigen, dass man die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen konstruieren kann, indem man „formale Grenzwerte“ hinzufügt. All diese Konstruktionen basieren auf dem Konzept der Äquivalenzrelationen und Bildung von Äquivalenzklassen:

Definition 2.11 (Äquivalenzrelation)**.** Sei X eine Menge. Eine Relation auf X ist eine *Äquivalenzrelation auf* X, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Ist $\sim\, \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$, so heißt

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\} \subset X$$

Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$. Man schreibt $X/\sim$ (gelesen: „*X modulo* $\sim$“) für die Menge

$$X/\sim\; := \big\{[x] \bigm| x \in X\big\} \subset P(X)$$

aller Äquivalenzklassen.

Bemerkung 2.12 (Eigenschaften von Äquivalenzklassen)**.** Sei X eine Menge und sei $\sim\, \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt:

1. Für alle $x, y \in X$ ist entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$.
2. Es ist $X = \bigcup(X/\sim)$ und diese Vereinigung ist disjunkt.

Die reellen Zahlen

Wie bereits angedeutet konstruieren wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen durch Hinzufügen „formaler Grenzwerte“:

Definition 2.13 (Reelle Zahlen)**.** Sei Q die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.

- Wir definieren die Relation „$\sim$“ auf Q durch die Menge
$$\bigl\{\bigl((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr)\in Q\times Q \bigm| (a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbb{Q}\bigr\}.$$
- Wir schreiben $\mathbb{R}:=Q/\sim$ und nennen $\mathbb{R}$ die *Menge der reellen Zahlen.*

Definition 2.14 (Addition/Multiplikation auf $\mathbb{R}$)**.** Wir definieren

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \bigl([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\bigr) &\longmapsto \bigl[(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr] \\ \cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \bigl([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\bigr) &\longmapsto \bigl[(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr] \end{aligned}$$

und schreiben in $\mathbb{R}=Q/\sim$ kurz $0:=[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ und $1:=[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Proposition 2.15 ($\mathbb{R}$ ist ein Körper)**.**

1. *Die oben definierten Abbildungen* $+,\ \cdot\,:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *sind wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen).*
2. *Die Menge* $\mathbb{R}=Q/\sim$ *bildet zusammen mit diesen Verknüpfungen „+“ und „·“ einen Körper; das neutrale Element bezüglich Addition ist* $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$*, das neutrale Element bezüglich Multiplikation ist* $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$*.*

Als nächsten Schritt führen wir eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ ein:

Definition 2.16 (Die Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{R}$)**.** Wir definieren „$\leq$“ auf $\mathbb{R}=Q/\sim$ durch die Menge

$$\bigl\{\bigl([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\bigr)\in Q/\sim\times Q/\sim \bigm| \forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}}\ \ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \ \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}}\ \ a_n\leq b_n+\varepsilon\bigr\}.$$

Proposition 2.17 ($(\mathbb{R},\leq)$ ist ein angeordneter Körper)**.**

1. *Die Relation „$\leq$“ auf* $\mathbb{R}$ *ist wohldefiniert.*
2. *Die Relation „$\leq$“ auf* $\mathbb{R}$ *ist eine Ordnung auf* $\mathbb{R}$*.*
3. *Der Körper* $\mathbb{R}$ *bildet zusammen mit „$\leq$“ einen angeordneten Körper.*
4. *Die Abbildung*
$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \bigl[(a)_{n\in\mathbb{N}}\bigr] \end{aligned}$$
is wohldefiniert, injektiv und verträglich mit Addition, Multiplikation und den Ordnungsrelationen; wir fassen daher $\mathbb{Q}$ *im folgenden vermöge dieser Abbildung als Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *auf.*

Satz 2.18 ($\mathbb{R}$ ist die „Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$)**.**
1. *Der angeordnete Körper* $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist archimedisch.*
2. *Die rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ *liegen* dicht *in* $\mathbb{R}$*, d.h. für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *existiert ein* $a \in \mathbb{Q}$ *mit* $|x - a| \leq \varepsilon$*.*
3. *Der angeordnete Körper* $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist Cauchy-vollständig.*

Der Beweis der letzten Aussage beruht auf einem Diagonalfolgenargument.

Bemerkung 2.19. Das hier angewandte Konstruktionsprinzip „Hinzufügen formaler Grenzwerte" bzw. „Cauchyfolgen modulo Nullfolgen" funktioniert auch in allgemeineren Kontexten und gehört zu den Standardkonstruktionen in der modernen Analysis.

Satz 2.20 (Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen)**.** *Ist* $(K, \leq)$ *ein archimedischer angeordneter Körper, der Cauchy-vollständig ist, so gibt es genau eine Bijektion* $\mathbb{R} \longrightarrow K$*, die mit Addition, Multiplikation und den Ordnungsrelationen verträglich ist.*

In anderen Worten: Der angeordnete Körper $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist bis auf kanonische Isomorphie der einzige archimedische angeordnete Cauchy-vollständige Körper.*

Bemerkung 2.21 („Wurzeln" in $\mathbb{R}$)**.** Man kann zeigen, dass es z.B. Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ gibt, deren Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt. Analog kann man (höhere) „Wurzeln" für alle nicht-negativen reellen Zahlen erklären; wir werden dies später systematisch mit Hilfe von Stetigkeitsargumenten tun.

Vollständigkeit und Beschränktheit

Neben der Charakterisierung/Definition von Vollständigkeit über Cauchyfolgen gibt es auch eine Charakterisierung von Abgeschlossenheit unter Approximation/Konvergenz in angeordneten Körpern, die auf der Existenz von kleinsten oberen Schranken beschränkter Megen beruht:

Definition 2.22 (Supremum/Infimum)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sei $A \subset K$.
- Eine *obere Schranke* von A in K ist ein $a \in K$ mit folgender Eigenschaft: für alle $x \in A$ ist $x \leq a$.
- Eine *untere Schranke* von A in K ist ein $a \in K$ mit folgender Eigenschaft: für alle $x \in A$ ist $a \leq x$.
- Ein $a \in K$ ist eine *kleinste obere Schranke* von A in K, wenn a eine obere Schranke von A in K ist und für jede obere Schranke $b \in K$ von A gilt, dass $a \leq b$ ist. Falls A eine kleinste obere Schranke besitzt, so ist diese eindeutig und heißt *Supremum von* A, bezeichnet mit $\sup A$.
- Analog sind größte untere Schranken von A in K und das *Infimium* von A in K, geschrieben $\inf A$, definiert.

Satz 2.23. *Jede nicht-leere beschränkte Teilmenge in* $\mathbb{R}$ *besitzt ein Supremum und ein Infimum in* $\mathbb{R}$*; eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}$ *heißt* beschränkt*, wenn es ein* $a \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass: für alle* $x \in A$ *ist* $|x| \leq a$*.*

Bemerkung 2.24. Die obige Eigenschaft von Existenz von Suprema bzw. Infima beschränkter Mengen kann als Definition für Vollständigkeit angeordneter Körper verwendet werden; sie führt zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ durch sogenannte Dedekindsche Schnitte.

Definition 2.25 (Monotonie)**.** Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ zwischen partiell geordneten Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ heißt

– *monoton wachsend*, falls

$$\forall_{x,x' \in X} \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$

– *streng monoton wachsend*, falls

$$\forall_{x,x' \in X} \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x').$$

– *monoton fallend*, falls

$$\forall_{x,x' \in X} \quad x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$

– *streng monoton fallend*, falls

$$\forall_{x,x' \in X} \quad x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x').$$

– *(streng) monoton*, falls sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

(Insbesondere liefert dies einen Monotoniebegriff für Folgen in partiell geordneten Mengen.)

Monotonie führt zusammen mit Satz 2.23 zu einem der wichtigsten Konvergenzkriterien für reellwertige Folgen:

Korollar 2.26. *Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen konvergiert in* $\mathbb{R}$.

Definition 2.27 (Häufungspunkt)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Ein Element $a \in K$ ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K, falls es zu jedem $\varepsilon \in K_{>0}$ und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $|a - a_n| \leq \varepsilon$ gibt.

Satz 2.28 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt einen Häufungspunkt in* $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.29. Verallgemeinerungen dieses Satzes führen zu sogenannten Kompaktheitsargumenten, die in der Analysis eine wichtige Rolle spielen.

Komplexe Zahlen

Es gibt eine algebraische Erweiterung der reellen Zahlen, die in vielen Gebieten der Analysis und Algebra aber auch in den Anwendungen eine wichtige Rolle spielt: die komplexen Zahlen.

Definition 2.30 (Komplexe Zahlen)**.**
- Die Menge
$$\mathbb{C} := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
heißt Menge der *komplexen Zahlen*; ist $(x,y) \in \mathbb{C}$, so nennen wir x den *Realteil* von (x,y) bzw. y den *Imaginärteil* von (x,y).
- Man nennt $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ die *imaginäre Einheit.*
- Auf $\mathbb{C}$ wird wie folgt eine Addition und eine Multiplikation definiert:
$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x+x', y+y') \\[1ex] \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.31. Man kann zeigen, dass $\mathbb{C}$ mit dieser Addition/Multiplikation einen Körper bildet; das neutrale Element bezüglich Addition ist $0 := (0,0) \in \mathbb{C}$, das neutrale Element bezüglich Multiplikation ist $1 := (1,0) \in \mathbb{C}$.

Caveat 2.32. In $\mathbb{C}$ gilt $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Insbesondere gibt es auf $\mathbb{C}$ *keine* Ordnung, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht.

Es gilt sogar allgemeiner (*Fundamentalsatz der Algebra*): Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle (diese lassen sich jedoch im allgemeinen nicht explizit durch iteriertes „Wurzelziehen" berechnen).

Warum kann man Analysis mit den komplexen Zahlen machen, obwohl $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist? Dazu verwendet man den Betrag:

Definition 2.33 (Komplexe Konjugation, Betrag)**.**
- Die *komplexe Konjugation* ist wie folgt definiert („Spiegeln an der reellen Achse"):
$$\begin{aligned} \overline{} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto (x,-y). \end{aligned}$$
- Die *Betragsfunktion* auf $\mathbb{C}$ ist durch
$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x,y) &\longrightarrow \text{„}\sqrt{x^2+y^2}\text{“} = \text{„}\sqrt{(x,y)\cdot\overline{(x,y)}}\text{“} \end{aligned}$$
definiert („Abstand von 0 in der reellen Ebene"); die (reellen) „Wurzeln" können hier gezogen werden, da die entsprechenden Terme nicht-negative reelle Zahlen sind (wir werden später noch genauer auf Wurzeln eingehen).

Bemerkung 2.34. Der Betrag auf $\mathbb{C}$ erfüllt die Dreiecksungleichung. Mit Hilfe des Betrags auf $\mathbb{C}$ erhält man eine Definition für Cauchyfolge bzw. Konvergenz von Folgen mit komplexen Folgengliedern und man kann zeigen, dass $\mathbb{C}$ in diesem Sinne Cauchy-vollständig ist. (Wir gehen an dieser Stelle nicht näher darauf ein, da wir später allgemeiner den Konvergenzbegriff in metrischen/topologischen Räumen einführen werden).

3 Reihen

Wir wollen im folgenden untersuchen, unter welchen Voraussetzungen man „unendlichen Summen" der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine sinnvolle Bedeutung/einen sinnvollen Wert geben kann und wie man mit solchen unendlichen Summen arbeiten kann.

Solche unendlichen Summen sind ein Hilfsmittel, um viele Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ geeignet darstellen bzw. definieren zu können (z.B. die Exponentialfunktion).

Caveat 3.1. Beim Umgang mit unendlichen Summen ist Vorsicht geboten! Im allgemeinen darf man mit solchen Summen nicht „naiv" rechnen!

Reihen – Grundbegriffe

Definition 3.2 (Reihe, Konvergenz von Reihen)**.** Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K.

- Wir schreiben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für die *(formale) Reihe* über die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Dies ist zunächst nur ein Symbol und besitzt noch keinen „Wert" in K).
- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist *konvergent in* K, wenn die Folge

  $$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

  der *Partialsummen* in K konvergiert. Man schreibt dann auch

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

  für den *(Grenz-)Wert* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht in K konvergent, so heißt sie *divergent in* K.
- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent in* K, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ in K konvergiert.

Im folgenden werden wir im Normalfall zunächst nur Reihen in $\mathbb{R}$ betrachten.

Beispiel 3.3 (Harmonische Reihe)**.** Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ist in $\mathbb{R}$ *nicht* konvergent, da die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist.

Proposition 3.4 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann ist die* geometrische Reihe *$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ in $\mathbb{R}$ konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Konvergenzkriterien

Im folgenden werden wir einige der grundlegenden Konvergenzkriterien für Reihen kennenlernen:

Bemerkung 3.5. Wir können natürlich alle Grenzwertsätze/Konvergenzkriterien für Folgen auf Folgen von Partialsummen anwenden. Zum Beispiel:

1. Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$ und sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a \cdot a_n + b \cdot b_n)$ in $\mathbb{R}$ konvergent und für den Wert dieser Reihe gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a \cdot a_n + b \cdot b_n) = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + b \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$
2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$.

Proposition 3.6 (Majorantenkriterium)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

1. *Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$.*
2. *Divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$, so divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$.*

Proposition 3.7 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$ mit: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq x.$$
Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ absolut konvergent.

Beispiel 3.8 (Exponentialreihe)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die *Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ absolut in $\mathbb{R}$.

Definition 3.9 (Exponentialfunktion, eulersche Zahl)**.** Die Funktion
$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$
heißt *Exponentialfunktion*; die Zahl
$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
heißt *eulersche Zahl*.

Bemerkung 3.10. Man kann zeigen, dass $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt und, dass man e auch nicht als Lösung einer (nicht-konstanten) polynomialen Gleichung über $\mathbb{Q}$ erhalten kann.

Die folgenden Propositionen klären wie das Konvergenzverhalten einer Reihe mit dem Konvergenzverhalten der unterliegenden Folge zusammenhängt:

Proposition 3.11. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.*

Caveat 3.12. Die Umkehrung dieser Proposition gilt im allgemeinen nicht! (Man betrachte etwa die harmonische Reihe.)

Proposition 3.13 (Leibnizkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*. Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ *in* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 3.14. *Jede absolut konvergente Reihe in* $\mathbb{R}$ *ist konvergent in* $\mathbb{R}$*.*

Caveat 3.15. Im allgemeinen ist nicht jede konvergente Reihe absolut konvergent! (Man betrachte etwa die alternierende harmonische Reihe.)

Caveat 3.16. Im allgemeinen ändert das Umordnen von Reihe das Konvergenzverhalten und den Grenzwert!

Satz 3.17 (Produkte absolut konvergenter Reihen)**.** *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{R}$*. Dann ist auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k})$ *(das sogenannte* Cauchyprodukt *dieser beiden Reihen) in* $\mathbb{R}$ *konvergent und für den Wert dieser Reihe gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\biggl(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\biggr) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Korollar 3.18 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Insbesondere ist $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Wir werden später noch weitere Konvergenzkriterien für Reihen kennenlernen (z.B. das Integralkriterium) und einige verblüffende Werte von Reihen ausrechnen.

Exkurs: Wieviele reelle Zahlen gibt es?

Wir werden uns im folgenden mit der Frage beschäftigen, „wieviele“ reelle Zahlen es gibt; dazu führen wir zunächst den Mächtigkeits- bzw. Abzählbarkeitsbegriff ein und untersuchen dann die reellen Zahlen mit Hilfe von Dezimaldarstellungen.

Definition 3.19 (Mächtigkeit von Mengen)**.** Seien X und Y Mengen.

- Die Mengen X und Y sind *gleichmächtig* (bzw. *haben dieselbe Kardinalität*), wenn es eine Bijektion $X \longrightarrow Y$ gibt; wir schreiben in diesem Fall $|X| = |Y|$.
- Die Mächtigkeit von X ist *höchstens so groß* wie die von Y, wenn es eine Injektion $X \longrightarrow Y$ gibt; wir schreiben in diesem Fall $|X| \leq |Y|$.
- Die Mächtigkeit von X ist *echt kleiner* als die von Y, wenn $|X| \leq |Y|$ und $|X| \neq |Y|$ gilt; wir schreiben in diesem Fall $|X| < |Y|$.

Bemerkung 3.20. Für alle Mengen X ist $|P(X)| > |X|$. Insbesondere gibt es *keine* Menge mit „maximaler“ Mächtigkeit!

Bemerkung 3.21 (Satz von Schröder-Bernstein)**.** Sind X, Y Mengen mit $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \leq |X|$, so folgt $|X| = |Y|$.

Definition 3.22 (Endlich/unendlich).
- Eine Menge X heißt *endlich*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|X| = |\mathbb{N}_{<n}| = „\{0, \dots, n-1\}“$$

gibt; man kann zeigen, dass n in diesem Fall eindeutig bestimmt ist und wir schreiben dann $|X| = n$.
- Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie nicht endlich ist.

Proposition 3.23 (Unendlichkeit und $\mathbb{N}$).
1. *Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich.*
2. *Eine Menge X ist genau dann unendlich, wenn $|X| \geq |\mathbb{N}|$ ist.*

Definition 3.24 (Abzählbar/überabzählbar).
- Eine Menge X heißt *abzählbar*, wenn $|X| \leq |\mathbb{N}|$ ist (wird manchmal auch als „höchstens abzählbar“ bezeichnet).
- Eine Menge X heißt *abzählbar unendlich*, wenn $|X| = |\mathbb{N}|$ ist (wird manchmal auch als „abzählbar“ bezeichnet).
- Eine Menge X heißt *überabzählbar*, wenn $|X| > |\mathbb{N}|$ ist.

Mit Hilfe eines Diagonalargumentes für Dezimalbrüche konnte Cantor folgendes Resultat zeigen:

Satz 3.25. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Korollar 3.26 (Existenz transzendenter Zahlen). *Man kann zeigen, dass es nur abzählbar viele Polynome mit rationalen Koeffizienten gibt und dass jedes nicht-konstante Polynom mit rationalen Koeffizienten nur endlich viele reelle Nullstellen hat; daher gibt es in $\mathbb{R}$ nur abzählbar viele sogenannte* algebraische *Zahlen, und somit muss es in $\mathbb{R}$ überabzählbar viele sogenannte* transzendente *Zahlen geben.*

Caveat 3.27. Es ist oft schwer, für konkrete reelle Zahlen nachzuweisen, dass sie transzendent sind. Zum Beispiel ist bekannt, dass die eulersche Zahl e, die Kreiszahl π und $\sum_{n=0}^{\infty} 1/10^{n!}$ transzendent sind; es ist jedoch nicht bekannt, ob $e+\pi$ transzendent ist!

Caveat 3.28 (Kontinuumshypothese). Die Frage, ob es eine Menge X mit

$$|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$$

gibt, ist unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre: Gödel und Cohen haben bewiesen, dass (wenn die Mengenlehre konsistent ist) weder die Existenz, noch die Nicht-Existenz einer solchen Menge aus den Axiomen der Mengenlehre gefolgert werden kann (!).

4 Stetigkeit

In den folgenden Kapiteln werden wir Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ untersuchen. Solche Funktionen

- treten häufig in Anwendungen auf (z.B. Modellierung zeitabhängiger Größen) und
- sind die grundlegenden Bausteine für mehrdimensionale Funktionen.

Es gibt jedoch sehr viele Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und im allgemeinen kann man nichts interessantes über solche Abbildungen aussagen. Wir werden uns daher auf hinreichend „gutartige“ Abbildungen einschränken.

So wie man etwa in der linearen Algebra Abbildungen untersucht, die mit der linearen Struktur verträglich sind, werden wir nun Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ studieren, die „mit Approximation verträglich“ sind – sogenannte stetige Funktionen.

Stetige Funktionen erfüllen unter anderem nützliche Fixpunktsätze, genügen dem Extremalprinzip und haben interessante Invertierbarkeitseigenschaften; insbesondere werden wir „Wurzeln“ einführen. Außerdem werden wir Approximation von Funktionen durch Funktionen betrachten.

Stetige Funktionen

Eine Funktion ist stetig, wenn sie „mit Approximation verträglich“ ist; dazu führen wir zunächst eine Notation für die Menge aller Punkte ein, die durch eine gegebene Menge approximiert werden können:

Definition 4.1 (Abschluss)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$. Der *Abschluss von X in* $\mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{X} := \bigl\{a \bigm| \text{es gibt eine Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } X \text{ mit } a \text{ als Grenzwert}\bigr\}.$$

Definition 4.2 (Stetig)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

- Sei $a \in \overline{X}$ und sei $y \in \mathbb{R}$. Der *Grenzwert von f für $X \ni x \to a$ ist y*, wenn folgendes gilt: Für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die in $\mathbb{R}$ gegen a konvergieren, ist auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$. In diesem Fall schreibt man
$$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = y.$$
- Sei $a \in X$. Die Abbildung f ist *stetig in* a, wenn $\lim_{X\ni x\to a} f(x) = f(a)$. Ausformuliert bedeutet dies: Für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die in $\mathbb{R}$ gegen a konvergieren, ist auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
- Die Abbildung f ist *auf X stetig*, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Zum Beispiel sind alle konstanten Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $|\cdot|\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

Proposition 4.3 (Vererbungseigenschaften stetiger Funktionen)**.**

1. *Sei $X \subset \mathbb{R}$. Sind $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig und sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch*
$$\begin{aligned} a\cdot f + b\cdot g\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a\cdot f(x) + b\cdot g(x) \end{aligned}$$

auf X stetig. Da $0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig ist, folgt somit, dass die Menge

$$C(X,\mathbb{R}) := \{f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } X\}$$

bezüglich der obigen linearen Struktur ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

2. *Sei $X \subset \mathbb{R}$. Sind $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig, so ist auch*

$$\begin{aligned} f \cdot g\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

   auf X stetig. Gilt außerdem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

   auf X stetig.

3. *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$, seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf X bzw. Y und es gelte $f(X) \subset Y$. Dann ist Komposition $g \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig.*

Korollar 4.4 (Polynomfunktionen sind stetig)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist die* Polynomfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = \text{„}a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n\text{“} \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten *$a_0, \dots, a_n$ stetig auf $\mathbb{R}$.*

Stetigkeit und offene Mengen

Wir werden nun die Stetigkeitsbedingung via Folgen umformulieren und so eine elegante und nützliche Charakterisierung von Stetigkeit durch sogenannte offene Mengen erhalten. Als ersten Schritt leiten wir dazu das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit her:

Proposition 4.5 (ε-δ-Kriterium)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und sei $a \in X$. Dann ist f genau dann in a stetig, wenn folgendes gilt: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\forall_{x \in X} \quad \bigl(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\bigr).$$

Im zweiten Schritt formulieren wir dies mit Hilfe offener Mengen um:

Definition 4.6 (Offen/abgeschlossen)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$.

– Ist $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so nennen wir

$$U(x,\varepsilon) := \bigl\{y \in \mathbb{R} \bigm| |y - x| < \varepsilon\bigr\}$$

  die *offene ε-Umgebung um x in $\mathbb{R}$.*

– Eine Teilmenge $U \subset X$ ist *offen in* X, falls: Für alle $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit
$$U(x, \varepsilon) \cap X \subset U.$$
– Eine Teilmenge $A \subset X$ ist *abgeschlossen in* X, falls $X \setminus A$ offen in X ist.

Proposition 4.7 (Abgeschlossenheit und Approximation)**.** *Sei* $X \subset \mathbb{R}$.
1. *Eine Teilmenge* $A \subset X$ *ist genau dann in* X *abgeschlossen, wenn folgendes gilt: Für alle Folgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* A*, die in* $\mathbb{R}$ *gegen einen Grenzwert aus* X *konvergieren, ist* $\lim_{n \to \infty} a_n$ *in* A*.*
2. *Der Abschluss* $\overline{X}$ *im Sinne von Definition 4.1 ist die bezüglich Inklusion kleinste in* $\mathbb{R}$ *abgeschlossene Menge, die* X *enthält.*

Notation 4.8 (Intervalle)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir

$[a, b]$	für das *abgeschlossene Intervall*	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	für das *offene Intervall*	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$(a, b]$	für das *halboffene Intervall*	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$	für das *halboffene Intervall*	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Tatsächlich ist $[a, b]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und (a, b) ist offen in $\mathbb{R}$.

Caveat 4.9. Offen ist *nicht* das Gegenteil von abgeschlossen! Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind, und es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen sind!

Proposition 4.10 (Stetigkeit und offene Mengen)**.** *Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *und sei* $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Abbildung. Dann ist* f *genau dann stetig auf* X*, wenn für alle in* $\mathbb{R}$ *offenen Teilmengen* $U \subset \mathbb{R}$ *das Urbild* $f^{-1}(U)$ *in* X *offen ist.*

Bemerkung 4.11 (Lokalität von Stetigkeit)**.** Die Eigenschaft stetig zu sein ist im folgenden Sinne eine *lokale Eigenschaft*: Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, sei $a \in X$ und sei $U \subset X$ eine in X offene Menge mit $a \in U$. Dann ist f genau dann stetig in a, wenn die Einschränkung $f|_U$ in a stetig ist.

Diese Charakterisierung von Stetigkeit führt zu eleganten Argumenten und Beweisen und erlaubt es, den Stetigkeitsbegriff auch in viel allgemeineren Kontexten einzuführen:

Bemerkung 4.12 (Topologie)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$. Aus der Definition in X offener Mengen folgt:
– Sowohl $\emptyset$ als auch X sind offen in X.
– Ist $U \subset P(X)$ eine Menge offener Mengen in X, so ist auch die Vereinigung $\bigcup U$ offen in X. Kurz: Vereinigungen offener Mengen sind offen.
– Sind $U, V \subset X$ offen in X, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ offen in X. Kurz: Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

Nimmt man diese Eigenschaften als Grundlage für ein Axiomensystem offener Mengen, so erhält man den Begriff der Topologie und einen allgemeinen Stetigkeitsbegriff.

Caveat 4.13. Unendliche Durchschnitte offener Mengen sind im allgemeinen *nicht* offen!

Der Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass stetige Funktionen „keine Sprünge machen" und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

Satz 4.14 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a,b]$ mit*

$$f(x) = y.$$

Der Zwischenwertsatz besagt insbesondere, dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösbar sind.

Korollar 4.15 (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 1)**.** *Ist $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $x \in [0,1]$ mit*

$$f(x) = x.$$

Bemerkung 4.16. Ein analoges Resultat gilt auch in höheren Dimensionen; der Beweis erfordert dann allerdings fortgeschrittene Methoden (algebraische Topologie).

Korollar 4.17 (Umkehrabbildungen streng monotoner Abbildungen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so ist f injektiv, es ist $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ und die inverse Abbildung $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist stetig.*

Korollar 4.18 (Wurzeln)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zu jedem $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x^n = y$; wir schreiben dann*

$$\sqrt[n]{y} := x$$

*und nennen x die n-*te Wurzel aus *y. Die Abbildung $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ ist stetig.*

Definition 4.19 (Rationale Exponenten)**.** Ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und sind $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so schreiben wir

$$x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{und} \qquad x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Dies liefert eine (wohldefinierte!) Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, x) &\longmapsto x^a. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.20 (Potenzgesetze)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x^{a \cdot b} = (x^a)^b, \qquad x^{a+b} = x^a \cdot x^b, \qquad (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^b.$$

Wir werden später Exponentiation mit reellen Exponenten mit Hilfe der Exponentialfunktion einführen.

Kompaktheit

Eines der wichtigsten Konzepte im Zusammenhang mit Stetigkeit ist Kompaktheit; wir werden hier nur einen kleinen Einblick geben und insbesondere das Extremalprinzip herleiten.

Definition 4.21 ((Folgen)kompakt)**.** Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ heißt *(folgen)kompakt*, wenn jede Folge in X eine (in $\mathbb{R}$) konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in X liegt. Eine *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist dabei eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es eine streng monoton wachsende Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad b_n = a_{f(n)}$$

gibt.

In $\mathbb{R}$ können kompakte Mengen wie folgt charakterisiert werden:

Satz 4.22 (Satz von Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Korollar 4.23. *Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so ist $[a, b]$ kompakt.*

Bemerkung 4.24 (Kompaktheit und offene Mengen)**.** Man kann zeigen, dass eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ genau dann kompakt im obigen Sinne ist, wenn folgendes gilt: Für alle Mengen $U \subset P(X)$ von in X offenen Mengen mit $\bigcup U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $V \subset U$ mit $\bigcup V = X$ (d.h. jede offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung).

Insbesondere erhält man so einen allgemeinen topologischen Kompaktheitsbegriff und es zeigt sich, dass Kompaktheit eine Art Endlichkeitsbedingung ist.

Proposition 4.25 (Extremalprinzip)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$ kompakt und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.*

1. *Dann ist auch $f(X)$ kompakt.*
2. *Insbesondere gilt: Ist $X \neq \emptyset$, so nimmt f auf X ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren $x_-, x_+ \in X$ mit: für alle $x \in X$ ist*

$$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+).$$

Approximation stetiger Funktionen

Oft möchte man komplizierte Funktionen durch einfachere Funktionen approximieren/definieren. daher ist es eine naheliegende Frage, wie sich Eigenschaften von Funktionen unter Approximation von Funktionen verhalten bzw. vererben:

Definition 4.26 (punktweise Konvergenz/gleichmäßige Konvergenz)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

– Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf X punktweise gegen f*, falls: für alle $x \in X$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

– Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf X gleichmäßig gegen f*, falls: für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad \forall_{x\in X} \quad \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \leq \varepsilon.$$

Caveat 4.27. Jede gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen ist auch punktweise konvergent – die Umkehrung gilt im allgemeinen jedoch *nicht*!

Proposition 4.28 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf X gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f auf X stetig.*

Caveat 4.29. Grenzfunktionen von punktweise konvergenten Folgen stetiger Funktionen sind im allgemeinen *nicht* stetig!

Korollar 4.30 (Konvergenz und Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und es gebe ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ absolut konvergiert. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} f_n\colon [-r, r] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k. \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-r, r]$ gleichmäßig gegen die (wohldefinierte) Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon [-r, r] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n. \end{aligned}$$

2. *Insbesondere ist f stetig auf $[-r, r]$.*

Korollar 4.31. *Insbesondere ist die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*

Korollar 4.32 (Der natürliche Logarithmus)**.** *Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist injektiv und* $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$*. Die Umkehrabbildung*

$$\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig und heißt natürlicher Logarithmus.

Bemerkung 4.33 (Charakterisierung der Exponentialfunktion über die Funktionalgleichung)**.** Die Exponentialfunktion ist die einzige stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(1) = e$ und

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Analog ist der natürliche Logarithmus die einzige stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(e) = 1$ und

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}_{>0}} \quad g(x \cdot y) = g(x) + g(y).$$

Bemerkung 4.34 (Reelle Exponenten)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt $x^a = \exp(a \cdot \ln x)$. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $y \in \mathbb{R}$ definiert man daher

$$x^y := \exp(y \cdot \ln x).$$

Man kann zeigen, dass dann die üblichen Potenzgesetze erfüllt sind.

Bemerkung 4.35 (Sinus/Cosinus)**.** Analog kann man zeigen, dass die Funktionen *Sinus* bzw. *Cosinus*, die durch

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2 \cdot n+1}}{(2 \cdot n+1)!}, \\ \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} \end{aligned}$$

definiert sind, auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Wegen

$$\cos(0) = 1 > 0 > \cos(2)$$

gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 2]$ mit $\cos(x) = 0$. Man definiert dann

$$\pi := 2 \cdot \inf\bigl\{x \in [0, 2] \bigm| \cos(x) = 0\bigr\}.$$

Da cos stetig ist, ist dann $\cos(\pi/2) = 0$ und nach Definition ist $\pi/2$ also die kleinste positive Nullstelle von cos. Den Zusammenhang von π mit dem Flächeninhalt/Umfang von Kreisen werden wir später analysieren.

5 Differenzierbarkeit

Wir möchten nun Funktionen lokal durch möglichst einfache Funktionen (lineare Funktionen) beschreiben/annähern bzw. verstehen, für welche Funktionen dies möglich ist.

Dies führt zum Begriff der Differenzierbarkeit und der Ableitung; die Ableitung kann dann (falls sie existiert) als lokale Änderungsrate der ursprünglichen Funktion verstanden werden und tritt so auch natürlich in Anwendungen auf (z.B. ist in der klassischen Mechanik die Ableitung des Orts (in Abhängigkeit von der Zeit) die Geschwindigkeit und die Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung).

Differenzierbare Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie sich lokal gut durch eine lineare Abbildung beschreiben lässt:

Definition 5.1 (Innerer Punkt)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in X$ ist ein *innerer Punkt von X*, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U(x, \varepsilon) \subset X$ gibt.

Definition 5.2 (Differenzierbar/Ableitung)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

– Sei $x \in X$ ein innerer Punkt von X. Dann ist f *in x differenzierbar*, wenn es ein $\Delta \in \mathbb{R}$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $x + U := \{x + h \mid h \in U\} \subset X$ sowie eine Abbildung $E \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{h \in U} \quad f(x + h) = f(x) + \Delta \cdot h + E(h)$$

und $\lim_{U \setminus \{0\} \ni h \to 0} E(h)/h = 0$ existiert.
Man kann zeigen, dass Δ in diesem Fall eindeutig bestimmt ist (hier geht ein, dass wir nur innere Punkte betrachten), und man nennt

$$f'(x) := \Delta$$

die Ableitung von f in x.

– Die Abbildung $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *auf X differenzierbar*, wenn sie in jedem inneren Punkt von X differenzierbar ist.

Bemerkung 5.3 (Lokalität von Differenzierbarkeit)**.** Aus der Definition folgt, dass Differenzierbarkeit (wie Stetigkeit) eine lokale Eigenschaft ist und dass die Ableitung in einem Punkt auch durch Einschränkung der Abbildung auf eine offene Umgebung dieses Punktes berechnet werden kann.

Man kann Differenzierbarkeit und die Ableitung auch durch den sogenannten Differentialquotienten beschreiben; insbesondere zeigt diese Beschreibung, dass die Ableitung als lokale Änderungsrate verstanden werden kann.

Proposition 5.4 (Differentialquotient)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $x \in X$ ein innerer Punkt von X. Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in x differenzierbar, wenn es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und $x + U \subset X$ gibt, so dass der Grenzwert*

$$\lim_{U \setminus \{0\} \ni h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

existiert; in diesem Fall stimmt dieser Grenzwert mit $f'(x)$ überein.

Proposition 5.5 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $a \in X$ ein innerer Punkt und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar. Dann ist f in a auch stetig.*

Caveat 5.6. Im allgemeinen gilt die Umkehrung nicht – nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar!

Vererbungseigenschaften differenzierbarer Funktionen

Die folgenden Vererbungseigenschaften erlauben es häufig, zu entscheiden, ob eine Funktion an einer gewissen Stelle differenzierbar ist bzw. ermöglichen es, die Ableitung zu bestimmen.

Proposition 5.7 (Linearität von Differenzierbarkeit)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $x \in X$ ein innerer Punkt von X. Sind $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist auch $a \cdot f + b \cdot g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und*

$$(a \cdot f + b \cdot g)'(x) = a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x).$$

Definition 5.8 (Die Räume C^k)**.**
- Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen. Dann schreiben wir $C^0(X, \mathbb{R}) := C(X, \mathbb{R})$ und definieren induktiv für alle $k \in \mathbb{N}$:

  $$C^{k+1}(X, \mathbb{R}) := \bigl\{f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \bigm| f \text{ ist auf } X \text{ differenzierbar und } f' \in C^k(X, \mathbb{R})\bigr\}.$$

  Die Funktionen aus $C^k(X, \mathbb{R})$ heißen *k-mal stetig auf X differenzierbar*. Die Elemente von

  $$C^\infty(X, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(X, \mathbb{R})$$

  heißen *glatte Funktionen auf X*.
- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann schreiben wir $C^0([a, b], \mathbb{R}) := C([a, b], \mathbb{R})$ und definieren induktiv für alle $k \in \mathbb{N}$:

  $$\begin{aligned} C^{k+1}([a, b], \mathbb{R}) := \bigl\{f \in C([a, b], \mathbb{R}) \bigm| & \ f \text{ ist auf } (a, b) \text{ differenzierbar und} \\ & \text{es gibt ein } g \in C^k([a, b], \mathbb{R}) \text{ mit } (f|_{(a,b)})' = g|_{(a,b)}\bigr\}. \end{aligned}$$

  Die Funktionen aus $C^k([a, b], \mathbb{R})$ heißen *k-mal stetig auf $[a, b]$ differenzierbar*. Die Elemente von

  $$C^\infty([a, b], \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k([a, b], \mathbb{R})$$

  heißen *glatte Funktionen auf $[a, b]$*.

Caveat 5.9. Ist $X \subset \mathbb{R}$ offen, so liegt im allgemeinen *nicht* jede auf X differenzierbare Abbildung bereits in $C^1(X, \mathbb{R})$; mit anderen Worten: die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist im allgemeinen *nicht* stetig!

Korollar 5.10. *Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $C^k(X, \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bezüglich punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum und die Abbildung*

$$\begin{aligned} C^{k+1}(X, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^k(X, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

ist linear.

Proposition 5.11 (Leibnizregel)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $x \in X$ ein innerer Punkt von X. Seien $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar.*

1. *Dann ist auch $f \cdot g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

2. *Ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in X$, so ist auch $f/g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Korollar 5.12 (Ableitung von Polynomfunktionen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, und sei*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \end{aligned}$$

die zugehörige Polynomfunktion. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Induktiv folgt insbesondere $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 5.13 (Kettenregel)**.** *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ und seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit $f(X) \subset Y$. Außerdem sei $x \in X$ ein innerer Punkt von X und sei $f(x)$ ein innerer Punkt von Y. Ist f in x differenzierbar und ist g in $f(x)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'\bigl(f(x)\bigr) \cdot f'(x).$$

Proposition 5.14 (Differenzierbarkeit inverser Funktionen)**.** *Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ offen und seien $f\colon X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ und $g\colon Y \longrightarrow X \subset \mathbb{R}$ zueinander inverse stetige Funktionen. Ist $x \in X$ und ist f in x differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist g in $f(x)$ differenzierbar und*

$$g'\bigl(f(x)\bigr) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Korollar 5.15 (Ableitung der Wurzelfunktionen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist die Abbildung*

$$g := \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar und für alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$g'(y) = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Lokale Extrema

Nach dem Extremalprinzip nehmen stetige Funktionen auf (nicht-leeren) Kompakta ein Minimum/Maximum an. Dieser Existenzbeweis ist jedoch nicht-konstruktiv. Im differenzierbaren Fall kann das folgende notwendige Kriterium helfen, lokale Extrema zu finden.

Definition 5.16 (Lokale Extremalstelle)**.** Sei $X \subset \mathbb{R}$ und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Ein Punkt $a \in X$ ist eine *lokale Maximalstelle von f*, wenn es eine in X offene Menge $U \subset X$ mit $a \in U$ und

$$\forall_{x \in U} \quad f(x) \leq f(a)$$

gibt. Analog sind *lokale Minimalstellen* definiert. Ein Punkt in X ist eine *lokale Extremalstelle von f*, wenn er eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle von f ist.

Proposition 5.17 (Stationarität lokaler Extrema)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$, sei $a \in X$ ein innerer Punkt von X und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar. Ist a eine lokale Extremalstelle von f, so gilt*

$$f'(a) = 0.$$

Ein erster Schritt um lokale Extrema zu finden ist also, Nullstellen der Ableitung zu bestimmen. Dies kann man für „hinreichend gutartige“ Funktionen etwa über das sogenannte Newton-Verfahren erreichen.

Caveat 5.18. Die obige Proposition ist nur ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema, kein hinreichendes Kriterium. Ein hinreichendes Kriterium kann z.B. mit Hilfe der zweiten Ableitung gegeben werden (Proposition 5.24).

Der Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz spielt eine zentrale Rolle in vielen Argumenten, da er es ermöglicht, das Wachstum auf einem Intervall durch die Ableitung abzuschätzen. Wir beginnen mit einem Spezialfall:

Satz 5.19 (Satz von Rolle)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist, mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = 0.$$

Korollar 5.20 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wir geben nun einige Anwendungen bzw. Folgerungen des Mittelwertsatzes:

Korollar 5.21 (Kern des Differenzierens). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf (a, b) differenzierbar ist, mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konstant.*

Korollar 5.22 (Strenge Monotonie via Ableitung). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f streng monoton wachsend.*

Caveat 5.23. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*, d.h. es gibt streng monoton wachsende differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung *nicht* überall positiv ist.

Proposition 5.24 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema). *Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen, sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $a \in X$ mit $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$. Dann ist a eine lokale Maximalstelle von f.*

Korollar 5.25 (Cauchyscher Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$g'(\xi) \cdot \bigl(f(b) - f(a)\bigr) = f'(\xi) \cdot \bigl(g(b) - g(a)\bigr).$$

Korollar 5.26 (Regel von l'Hospital). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f, g\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften:*
- *Es seien f und g auf (a, b) differenzierbar,*
- *es gelte $\lim_{(a,b)\ni x\to a} f(x) = 0 = \lim_{(a,b)\ni x\to a} g(x)$,*
- *es existieren die Grenzwerte $\lim_{(a,b)\ni x\to a} f'(x)$ und $\lim_{(a,b)\ni x\to a} g'(x)$ und es sei $\lim_{(a,b)\ni x\to a} g'(x) \neq 0$.*

Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a + \varepsilon < b$, so dass g und g' auf $(a, a + \varepsilon)$ keine Nullstellen besitzen, so dass der Grenzwert $\lim_{(a,a+\varepsilon)\ni x\to a} f(x)/g(x)$ existiert und

$$\lim_{(a,a+\varepsilon)\ni x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{(a,a+\varepsilon)\ni x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Von der Regel von l'Hospital gibt es zahlreiche Varianten; indem man „n“ und „$n \to \infty$“ durch „$1/x$“ und „$x \to 0$“ ersetzt, erhält man außerdem aus der Regel von l'Hospital Konvergenzaussagen für gewisse Folgen.

Bemerkung 5.27. Der Mittelwertsatz spielt zum Beispiel auch eine wichtige Rolle im Beweis, dass die Zahl $\sum_{n=0}^{\infty} 1/10^{n^n}$ transzendent ist.

6 Integration

Die folgenden Fragen, die zunächst nicht zusammenzuhängen zu scheinen, besitzen eine gemeinsame Antwort:

1. (Wie) Kann man den Differentiationsprozess umkehren?
2. (Wie) Kann man den (signierten) „Flächeninhalt unter einer Kurve“ berechnen?

Wir werden im folgenden mit einer Antwort auf die zweite Frage beginnen und dafür das Riemann-Integral einführen; den Zusammenhang mit der ersten Frage stellen wir dann über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung her.

Was ist ein Integral?

Unser Ziel ist es, einen Integralbegriff zu finden, der es erlaubt, den „Flächeninhalt unter einer Kurve“ zu berechnen. Im allgemeinen konstruiert man einen solchen Integralbegriff mit Hilfe der folgenden Strategie:

1. Man erklärt das Integral für gewisse geeignete einfache Funktionen (zumeist gewisse Treppenfunktionen).
2. Man „approximiert“ allgemeinere Funktionen geeignet durch Treppenfunktionen und definiert dann das Integral als den Grenzwert der Integrale der Treppenfunktionen (falls dieser existiert).

Im Fall des Riemann-Integrals erlaubt man im ersten Schritt Treppenfunktionen basierend auf Intervallen (und definiert dafür das Integral über den Flächeninhalt von Rechtecken) und verwendet sogenannte Ober- und Untersummen um den zweiten Schritt zu realisieren.

Lässt man allgemeinere Treppenfunktionen zu und verwendet man eine andere Approximation, so gelangt man zum Beispiel zum Lebesgue-Integral.

Im Idealfall sollte ein Integralbegriff außerdem die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Linearität,
- Positivität,
- Normiertheit,
- möglichst gute Approximationseigenschaften,
- möglichst viele Funktionen sollten integrierbar sein.

Das Riemann-Integral

Das Riemann-Integral wird durch Approximation mit Unter- bzw. Obersummen konstruiert.

Definition 6.1 (Partition eines Intervalls)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

- Eine *Partition von* $[a, b]$ ist eine endliche Folge $(t_0, \dots, t_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ und
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$
- Eine Partition von $[a, b]$ ist eine *Verfeinerung* von den Partitionen P und Q von $[a, b]$, wenn sie P und Q als Teilfolgen enthält.

Jede Partition eines Intervalls liefert für beschränkte Funktionen auf diesem Intervall eine Approximation durch eine Treppenfunktion von unten bzw. oben; die Summe der Flächen der entsprechenden Rechtecke führen zu Unter- bzw. Obersummen:

Definition 6.2 (Unter-/Obersumme)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, sei $P = (t_0, \dots, t_n)$ eine Partition von $[a, b]$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

– Die *Untersumme von f bezüglich P* ist gegeben durch

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{j=0}^{n-1} \inf\bigl\{f(x) \bigm| x \in [t_j, t_{j+1})\bigr\} \cdot (t_{j+1} - t_j).$$

– Die *Obersumme von f bezüglich P* ist gegeben durch

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{j=0}^{n-1} \sup\bigl\{f(x) \bigm| x \in [t_j, t_{j+1})\bigr\} \cdot (t_{j+1} - t_j).$$

Bemerkung 6.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt für alle Partitionen P von $[a, b]$, dass

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b - a).$$

Insbesondere können wir das Supremum aller Untersummen bzw. das Infimum aller Obersummen bilden und erhalten so das Unter- bzw. Oberintegral:

Definition 6.4 (Unter-/Oberintegral)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

– Das *Unterintegral von f auf* $[a, b]$ ist definiert durch

$$\underline{\int_a^b} f := \underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup\bigl\{\underline{S}(f, P) \bigm| P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\bigr\}.$$

– Das *Oberintegral von f auf* $[a, b]$ ist definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f := \overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf\bigl\{\overline{S}(f, P) \bigm| P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\bigr\}.$$

Bemerkung 6.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Definition 6.6 (Riemann-integrierbar/Riemann-Integral)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

– Eine Funktion $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *Riemann-integrierbar*, wenn sie beschränkt ist und $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ ist.

– Ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist

$$\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

das *Riemann-Integral von f auf* $[a,b]$.

Bemerkung 6.7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ Partitionen P und Q von $[a,b]$ mit

$$\underline{S}(f,P) \geq \overline{\int_a^b} f - \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \overline{S}(f,Q) \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon$$

gibt.

Caveat 6.8. Nicht alle beschränkten Funktionen sind Riemann-integrierbar!

Vererbungseigenschaften des Riemann-Integrals

Im folgenden werden wir die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen genauer untersuchen; wir beginnen mit den grundlegenden Eigenschaften eines jeden Integrals:

Proposition 6.9 (Grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.*

1. Linearität. *Für alle auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und alle $c, d \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $c \cdot f + d \cdot g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g) = c \cdot \int_a^b f + d \cdot \int_a^b g.$$

2. Positivität. *Für alle auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

3. Normiertheit. *Es gilt $\int_a^b 1 = b - a$.*

Korollar 6.10 (Monotonie des Riemann-Integrals)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Sind $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Proposition 6.11 (Dreiecksungleichung des Riemann-Integrals)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

1. *Dann ist auch*
$$\begin{aligned}\max(f,0)\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \max\bigl(f(x),0\bigr)\end{aligned}$$
Riemann-integrierbar.
2. *Insbesondere ist* $|f| = \max(f,0) + \max(-f,0)$ *auf* $[a,b]$ *Riemann-integrierbar und*
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 6.12 (Linearität des Riemann-Integrals bezüglich Intervallen)**.** *Seien* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b \leq c$ *und sei* $f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann ist* f *genau dann auf* $[a,c]$ *Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkungen* $f|_{[a,b]}$ *und* $f|_{[b,c]}$ *auf* $[a,b]$ *bzw.* $[b,c]$ *Riemann-integrierbar sind, und in diesem Fall gilt*
$$\int_a^c f = \int_a^b f|_{[a,b]} + \int_b^c f|_{[b,c]}.$$

Notation 6.13. Sind $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so schreiben wir auch
$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$
(Dann gelten analoge Linearitätsaussagen wie in Proposition 6.12).

Satz 6.14 (Stetige/monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar)**.** *Seien* $a,b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$.
1. *Ist* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so ist* f *Riemann-integrierbar.*
2. *Ist* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *monoton, so ist* f *Riemann-integrierbar.*

Man beachte jedoch, dass dieser Satz keine explizite Berechnung der Integrale liefert.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt einen Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration her; insbesondere erlaubt er es, gewisse Integrale explizit zu berechnen, ohne Ober-/Untersummen zu analysieren.

Satz 6.15 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I)**.** *Seien* $a,b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$ *und sei* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. Dann ist die Funktion*
$$\begin{aligned}F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \int_a^x f|_{[a,x]}\end{aligned}$$
wohldefiniert und es gilt:
1. *Die Funktion* F *ist auf* $[a,b]$ *stetig.*

2. *Ist $x \in (a,b)$ und ist f in x stetig, so ist F in x differenzierbar.*

Insbesondere kann man Integration auch als Glättungsprozess auffassen.

Satz 6.16 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Außerdem gebe es eine Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit: für alle $x \in (a,b)$ ist*

$$F'(x) = f(x).$$

Dann gilt

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Der zweite Hauptsatz erlaubt es also, Integrale $\int_a^b f$ zu berechnen, indem man eine Funktion F mit $F' = f$ (eine sogenannte *Stammfunktion von f*) an den Integralgrenzen auswertet.

Korollar 6.17 (Riemann-Integral von Polynomfunktionen)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt*

$$\int_a^b \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j \, dx = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} \cdot b^{j+1} - \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} \cdot a^{j+1}.$$

Caveat 6.18. Man kann zeigen, dass man im allgemeinen Stammfunktionen *nicht* explizit bestimmen kann!

Indem man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit den Vererbungseigenschaften der Ableitung kombiniert, erhält man die folgenden Integrationstechniken:

Proposition 6.19 (Partielle Integration)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Dann ist*

$$\int_a^b f' \cdot g = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f \cdot g'.$$

Hierbei stehen f' bzw. g' (die ja eigentlich nur auf (a,b) definiert sind) für die stetigen Fortsetzungen von f' bzw. g' auf $[a,b]$; diese stetigen Fortsetzungen existieren wegen $f, g \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ und sind außerdem eindeutig.

Proposition 6.20 (Integration durch Substitution)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $\tau \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, und sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei*

$$I := \begin{cases} \bigl[\tau(a), \tau(b)\bigr] & \text{falls } \tau(a) \leq \tau(b) \\ \bigl[\tau(b), \tau(a)\bigr] & \text{falls } \tau(a) > \tau(b). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f\bigl(\tau(x)\bigr) \cdot \tau'(x) \, dx.$$

Approximation von Funktionen und Integration bzw. Differentiation

Wir werden im folgenden untersuchen wie sich Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit unter Approximation von Funktionen verhalten; insbesondere wird dies entsprechende Resultate für Potenzreihenfunktionen (und somit für die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus) liefern.

Satz 6.21 (Gleichmäßige Konvergenz und Riemann-Integral)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Caveat 6.22. Punktweise Konvergenz verträgt sich im allgemeinen *nicht* mit Integration!

Korollar 6.23 (Konvergenz von Funktionenfolgen und Differentiation)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen vom Typ $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und seien $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

– *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in C^1([a, b], \mathbb{R})$,*
– *die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[a, b]$ punktweise gegen f,*
– *die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen g.*

Dann ist f auf (a, b) differenzierbar und für alle $x \in (a, b)$ gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x).$$

Caveat 6.24. Konvergiert eine Folge von C^1-Funktionen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, so ist diese Grenzfunktion im allgemeinen *nicht* differenzierbar – gleichmäßige Konvergenz liefert im allgemeinen *nicht* genug Kontrolle über die Ableitungen.

Korollar 6.25 (Differentiation von Potenzreihenfunktionen)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, für die es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ absolut konvergiert. Dann ist die Potenzreihenfunktion*

$$\begin{aligned} f\colon [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \end{aligned}$$

wohldefiniert, auf $[-r, r]$ stetig, auf $(-r, r)$ differenzierbar und für alle $x \in (-r, r)$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}.$$

Korollar 6.26 (Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion und von Sinus, Cosinus)**.** *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} \exp' &= \exp \\ \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin . \end{aligned}$$

Bemerkung 6.27. Bis auf konstante Faktoren ist die Exponentialfunktion die einzige differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = f$.

Korollar 6.28 (Differenzierbarkeit/Stammfunktion von ln)**.**

1. *Die Funktion* $\ln \colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist auf* $\mathbb{R}_{>0}$ *differenzierbar und für alle* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *ist*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} F \colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \cdot \ln x - x \end{aligned}$$

ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ *differenzierbar und für alle* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *ist* $F'(x) = \ln(x)$.

Bemerkung 6.29. Mit den bisher vorgestellten Techniken kann man zeigen, dass

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

ist (!).

Taylorentwicklung

Wir haben die Exponentialfunktion sowie Sinus und Cosinus über Potenzreihen definiert. Es stellt sich daher die Frage, ob man jede hinreichend glatte Funktion (lokal) als Potenzreihe entwickeln kann. Im folgenden werden wir diese Frage genauer untersuchen.

Nach Definition liefert die Ableitung eine lineare Approximation an die gegebene Funktion; analog liefern die höheren Ableitungen bessere Approximationen:

Satz 6.30 (Taylorentwicklung)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$, *sei* $N \in \mathbb{N}$, *sei* $f \in C^{N+1}((a,b), \mathbb{R})$ *und sei* $t \in (a,b)$. *Dann gilt für alle* $x \in (a,b)$, *dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(t)}{j!} \cdot (x-t)^j + \int_t^x \frac{f^{(N+1)}(s)}{N!} \cdot (x-s)^N \, ds;$$

den ersten Summanden bezeichnet man auch als N-tes Taylorpolynom von f um t *und den zweiten als* N-tes Restglied in Integralform.

Definition 6.31 (Taylorreihe)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f \in C^\infty((a,b),\mathbb{R})$ und sei $t \in (a,b)$. Ist $r \in \mathbb{R}_{>0}$ so dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f^{(n)}(t)/n! \cdot r^n$ absolut konvergiert, so heißt

$$\begin{aligned}
[t-r, t+r] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n
\end{aligned}$$

Taylorreihe von f um t in $[t-r, t+r]$.

Bemerkung 6.32. Die Taylorreihe einer glatten Funktion konvergiert genau dann gegen die Funktion, wenn die Restglieder gegen 0 konvergieren, wenn die Ordnung gegen ∞ geht.

Caveat 6.33. Es gibt glatte Funktionen, für die die entsprechende Taylorreihe (um einen gegebenen Punkt) konvergiert, die Taylorreihe aber in keiner offenen Umgebung dieses Punktes die ursprüngliche Funktion beschreibt. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist

$$\begin{aligned}
f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{falls } x > 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

diese Funktion ist glatt(!) und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f^{(n)}(0) = 0$.

Korollar 6.34 (Taylorentwicklung des Logarithmus)**.** *Für alle $x \in (-1,1)$ ist*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

Bemerkung 6.35. Für die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus stimmt die Taylorreihe um 0 mit den definierenden Potenzreihen überein; man beachte in diesem Zusammenhang auch den Identitätssatz für Potenzreihen.