Analysis I im SS 2011 – Kurzskript, Ergänzung

Prof. Dr. C. Löh Sommersemester 2011

Satz (Monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$ *und sei* $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *monoton. Dann ist* f *Riemann-integrierbar.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass f monoton wachsend ist. Dann ist f nach unten durch $f(a)$ und nach oben durch $f(b)$ beschränkt.

Es genügt also zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Partition P von $[a,b]$ mit $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \varepsilon$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Idee ist nun, den Bildbereich von f, also das Intervall $[f(a), f(b)]$, in feine Teile zu zerlegen und daraus eine geeignete Partition von $[a,b]$ zu konstruieren.

Sei $M := f(b) - f(a)$, und sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$n > \frac{2 \cdot M}{\varepsilon \cdot (b-a)}.$$

Wir definieren nun $t_0, \dots, t_n$ und $s_0, \dots, s_{n-1}$ induktiv durch $t_0 := a$ und

$$t_{j+1} := \sup\bigl\{x \in [t_j, b] \bigm| f(x) \leq f(a) + (j+1) \cdot M/n\bigr\},$$

für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$, sowie

$$s_j := \min\Bigl(t_j + \frac{\varepsilon}{2 \cdot M \cdot n}, t_{j+1}\Bigr)$$

für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Nach Konstruktion gilt

$$a = t_0 \leq s_0 \leq t_1 \leq s_1 \leq \dots \leq t_n = b$$

und

$$\forall_{j \in \{0,\dots,n-1\}} \quad \forall_{x \in [s_j, t_{j+1})} \quad f(s_j) \leq f(x) \leq f(s_j) + \frac{M}{n};$$

indem man mehrfach auftretende Elemente streicht, erhält man so eine Partition P von $[a,b]$.

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{j=0}^{n-1} \Bigl(\bigl(\sup\{f(x) \mid x \in [t_j, s_j)\} - \inf\{f(x) \mid x \in [t_j, s_j)\}\bigr) \cdot (s_j - t_j) \\
&\qquad + \bigl(\sup\{f(x) \mid x \in [s_j, t_{j+1})\} - \inf\{f(x) \mid x \in [s_j, t_{j+1})\}\bigr) \cdot (t_{j+1} - s_j) \Bigr) \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \Bigl(M \cdot (s_j - t_j) + \frac{M}{n} \cdot (t_{j+1} - s_j) \Bigr) \\
&\leq n \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M \cdot n} + \frac{M}{n} \cdot (b-a) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. □

Version vom 25. Juli 2011
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg