Probeklausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 27. Juli 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: | | | | | | | | Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	7	13	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann

$$(A \wedge B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$$

   eine aussagenlogische Tautologie?

2. Gilt $(A \cap B) \cap C = A \cap (A \cup C)$ für alle Mengen A, B, C ?

3. Sind alle reflexiven Relationen symmetrisch?

4. Ist $\big\{(m,n) \bigm| (m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge \big(\exists_{k \in \mathbb{N}} \quad m + n = k\big)\big\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ genau dann monoton wachsend, wenn folgendes gilt?
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{m\in\mathbb{N}} \quad \big((m > n) \wedge (a_m \geq a_n)\big).$$
2. Besitzt jede Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$?
3. Ist die Folge $(\frac{\sqrt{n}}{n+2011})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent?
4. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1})^n$ in $\mathbb{R}$ konvergent?

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sind alle stetigen Funktionen $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt?
2. Sind alle stetigen Funktionen $(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt?
3. Sind alle injektiven Funktionen $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig?
4. Gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen sind?

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz von Rolle!
2. Formulieren Sie den Mittelwertsatz!
3. Beweisen Sie den Mittelwertsatz mit Hilfe des Satzes von Rolle.

Aufgabe 5 (4 + 3 = 7 Punkte)**.** Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x^n. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, gegen die die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ auf $[0,1]$ punktweise konvergiert.

2. Ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig auf $[0,1]$?

Aufgabe 6 $(4+3+3+3=13$ Punkte$)$**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>}0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x+2011)^x. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ ist, und berechnen Sie die Ableitung von f auf $\mathbb{R}_{>0}$.

2. Ist f monoton?

3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \cdot f'(x^2+1) \end{aligned}$$

   auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

4. Bestimmen Sie $\int_0^1 g$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass dann $\int_0^1 f > 0$ ist.