Wiederholungsklausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 5. Oktober 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	9	11	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann
$$(A \land \neg B) \lor (A \Longrightarrow B)$$
eine aussagenlogische Tautologie?

2. Gilt für alle Mengen A, dass jede injektive Abbildung $A \longrightarrow A$ bereits surjektiv ist?

3. Gilt
$$\forall_{x \in K} \quad \exists_{y \in K} \quad x \leq y^2$$
in jedem angeordneten Körper $(K, \leq)$?

4. Ist die Relation $\bigl\{(m,n) \bigm| (m,n \in \mathbb{Z}) \land (m \leq n-1)\bigr\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$?
2. Gilt $\inf \{ \inf B \mid B \in A\} = 0$ für alle nicht-leeren Mengen $A \subset P([0,1])$ von nicht-leeren Teilmengen von $[0,1]$?
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen sei induktiv durch $a_0 := 1$ und
$$a_n := \frac{a_{n-1}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definiert. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent?
4. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist jede Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

   $$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \exists_{\delta \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \forall_{y \in \mathbb{R}} \quad \Bigl(|x - y| < \varepsilon \Longrightarrow \bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \delta\Bigr)$$

   stetig?

2. Bilden alle stetigen Funktionen $(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ alle beschränkten Teilmengen von $(0,1)$ auf beschränkte Mengen in $\mathbb{R}$ ab?

3. Sind Urbilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ immer kompakt?

4. Ist für jede stetige Abbildung $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung

   $$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t f(x)\, dx \end{aligned}$$

   monoton?

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie das Extremalprinzip!
2. Formulieren Sie den Satz von Rolle!
3. Beweisen Sie den Satz von Rolle mit Hilfe des Extremalprinzips.

Aufgabe 5 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon (0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

und zu $t \in (0,1]$ sei $f_t := f|_{[t,1]}\colon [t,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie für alle $t \in (0,1]$, dass f_t Riemann-integrierbar ist.
2. Bestimmen Sie $\int_t^1 f_t$ für alle $t \in (0,1]$.
3. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{(0,1]\ni t\to 0} \int_t^1 f_t$ existiert und bestimmen Sie ihn.

Aufgabe 6 $(3+4+4=11$ Punkte$)$**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in (-1,1)$ absolut konvergiert (in $\mathbb{R}$).

2. Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $(-1,1)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung von f.

3. Zeigen Sie, dass $f(x) = \ln(x+1)$ für alle $x \in [0, 1/2]$ gilt.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $V \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion auf V. Sei $x \in V$ ein Punkt mit $f'(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subset V$ mit $x \in U$ gibt, für die die Einschränkung

$$f|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.