Wiederholungsklausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 5. Oktober 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	9	11	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann
$$(A \land \neg B) \lor (A \Longrightarrow B)$$
eine aussagenlogische Tautologie?

2. Gilt für alle Mengen A, dass jede injektive Abbildung $A \longrightarrow A$ bereits surjektiv ist?

3. Gilt
$$\forall_{x \in K} \quad \exists_{y \in K} \quad x \leq y^2$$
in jedem angeordneten Körper $(K, \leq)$?

4. Ist die Relation $\bigl\{(m,n) \bigm| (m,n \in \mathbb{Z}) \land (m \leq n-1)\bigr\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z}$?

Lösung:

1. Ja, denn: Es sind $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (B \lor \neg A)$, $(B \lor \neg A) \Longleftrightarrow \neg(A \land \neg B)$ und $(A \land \neg B) \lor \neg(A \land \neg B)$ Tautologien.

   Alternativ mittels einer Wahrheitstafel:

A	B	$A \land \neg B$	$A \Longrightarrow B$	$(A \land \neg B) \lor (A \Longrightarrow B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

2. Nein, denn: Beispielsweise ist die Abbildung $1/2 \cdot \mathrm{id}_{[0,1]} \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$; $x \longmapsto 1/2 \cdot x$ injektiv, aber nicht surjektiv.

3. Ja, denn: Wegen $1^2 = 1$ genügt es den Fall $x \in K_{>1}$ zu betrachten (insbesondere ist dann $x > 0$). Dann gilt
$$x = x \cdot 1 \leq x \cdot x = x^2.$$
[Alternativ: Wegen $0 = 0^2$ genügt es, den Fall $x \in K_{>0}$ zu betrachten. Dann gilt
$$(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x + 1 \geq 2 \cdot x \geq x.]$$

4. Nein, denn: Die Relation ist nicht reflexiv, denn z.B. ist $1 \not\leq 0 = 1 - 1$.
   [Alternativ: Es gilt:

   $$\forall_{m,n\in\mathbb{Z}} \quad m \leq n - 1 \Longleftrightarrow m < n$$

   Die Relation ist insbesondere nicht reflexiv, also keine partielle Ordnung.]

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$?
2. Gilt $\inf\{\inf B \mid B \in A\} = 0$ für alle nicht-leeren Mengen $A \subset P([0,1])$ von nicht-leeren Teilmengen von $[0,1]$?
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen sei induktiv durch $a_0 := 1$ und
$$a_n := \frac{a_{n-1}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definiert. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent?
4. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ in $\mathbb{R}$?

Lösung:

1. Ja, denn: Jede monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ und ist insbesondere eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
2. Nein, denn: Für $A := \big\{\{1\}\big\} \subset P([0,1])$ gilt:
$$\inf\big\{\inf B \bigm| B \in A\big\} = \inf\big\{\inf\{1\}\big\} = \inf\{1\} = 1 \neq 0.$$
3. Nein, denn: Induktiv sieht man, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt außerdem $1/n^2 + 1/n < 1$ und daher $a_n \geq a_{n-1}$. Also erhalten wir
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} \geq \frac{a_1}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} \geq \frac{a_1}{2 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \cdot n.$$
Somit ist die Folge unbeschränkt und insbesondere divergent (in $\mathbb{R}$).
[Alternativ: Induktiv folgt, dass
$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und damit

$$\log a_n = -\sum_{k=1}^{n} \log\Big(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\Big).$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\right)$ divergiert jedoch (bestimmt), da die zugrunde liegende Summandenfolge keine Nullfolge ist. Aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt so die Behauptung.]

4. Ja, denn: Die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und die Konvergenz der angegebenen Reihe folgt daher aus dem Leibniz-Kriterium.

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist jede Abbildung $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad \exists_{\delta\in\mathbb{R}_{>0}} \quad \forall_{y\in\mathbb{R}} \quad \Bigl(|x-y| < \varepsilon \Longrightarrow \bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \delta\Bigr)$$
stetig?

2. Bilden alle stetigen Funktionen $(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ alle beschränkten Teilmengen von $(0,1)$ auf beschränkte Mengen in $\mathbb{R}$ ab?

3. Sind Urbilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ immer kompakt?

4. Ist für jede stetige Abbildung $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung
$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t f(x)\,dx \end{aligned}$$
monoton?

Lösung:

1. Nein, denn: Beispielsweise liefert jede beschränkte, nicht stetige Funktion ein Gegenbeispiel, etwa
$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{R}_{>0}} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$
Die Funktion $\chi_{\mathbb{R}_{>0}}$ ist offensichtlich nicht stetig, aber für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt
$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad |x-y| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 2.$$

2. Nein, denn: Man betrachte etwa die Funktion
$$\begin{aligned} i \colon (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$
Diese Abbildung ist stetig, aber $(0,1)$ ist beschränkt und $i((0,1)) = \mathbb{R}_{>1}$ ist nicht beschränkt.

3. Nein, denn: Zum Beispiel ist $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\quad x \longmapsto 0$ eine stetige Funktion, $\{0\}$ kompakt, aber $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

4. Nein, denn: Man betrachte etwa die durch $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R};\quad x \longmapsto 1/2 - x$ gegebene Funktion. Dann ist

$$t \longmapsto \int_0^t \left(\frac{1}{2} - x\right)\, dx = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (1-t)$$

nicht monoton auf $[0,1]$.

[Alternativ: Jede stetige Funktion auf $[0,1]$, die sowohl positive als auch negative Werte annimmt liefert hier ein Gegenbeispiel].

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie das Extremalprinzip!
2. Formulieren Sie den Satz von Rolle!
3. Beweisen Sie den Satz von Rolle mit Hilfe des Extremalprinzips.

Lösung:

1. Extremalprinzip: Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
   - Dann ist auch $f(X)$ kompakt.
   - Insbesondere gilt: Ist $X \neq \emptyset$, so nimmt f auf X ein Maximum und ein Minimum an.
2. Satz von Rolle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit
   $$f'(\xi) = 0.$$
3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist und es gelte $f(a) = f(b)$. Das abgeschlossene Interval $[a, b]$ ist kompakt und f stetig, also nimmt f auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an.
   - Falls Maximum und Minimum am Rand angenommen werden, d.h. falls
     $$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(b) = f(a) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$
     gilt, so folgt bereits $\min_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Also ist f konstant und daher $f|'_{(a,b)} = 0$.
   - Andernfalls gibt es ein $\xi \in (a, b)$ derart, dass f in ξ ein globales (und insbesondere lokales) Maximum oder Minimum annimmt. Nach dem notwendigen Kriterium für lokale Extremstellen folgt $f'(\xi) = 0$.

Aufgabe 5 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Sei

$$f\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

und zu $t \in (0,1]$ sei $f_t := f|_{[t,1]}\colon [t,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie für alle $t \in (0,1]$, dass f_t Riemann-integrierbar ist.
2. Bestimmen Sie $\int_t^1 f_t$ für alle $t \in (0,1]$.
3. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{(0,1]\ni t\to 0} \int_t^1 f_t$ existiert und bestimmen Sie ihn.

Lösung:

1. Es gilt $\sqrt{x} \neq 0$ für alle $x \in (0,1]$, die Funktion f ist also definiert und als Komposition/Quotient stetiger Funktionen stetig; daher sind auch die Einschränkungen f_t für alle $t \in (0,1]$ stetig und somit insbesondere Riemann-integrierbar.
2. Sei $t \in (0,1]$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_t^1 f_t &= \int_t^1 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_t^1 \frac{e^{\ln 3\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_{\sqrt{t}}^1 2\cdot e^{\ln 3\cdot z}\,dz. &&\text{(Substitution } \sqrt{x}\to z\text{)}\end{aligned}$$

Mit dem (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir dieses Integral wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\int_t^1 f_t &= \Big[\frac{2}{\ln 3}\cdot e^{\ln 3\cdot z}\Big]_{z=\sqrt{t}}^{z=1}\\ &= \frac{2}{\ln 3}\cdot(3-3^{\sqrt{t}}).\end{aligned}$$

[Alternativ kann man natürlich auch direkt eine Stammfunktion von f_t (etwa $x \longmapsto 2/\ln 3\cdot 3^{\sqrt{x}}$) angeben und den Hauptsatz benutzen].

3. Die Wurzel- und Exponentialfunktion sind stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach Teil 2 existiert daher der gesuchte Grenzwert und es gilt:

$$\lim_{(0,1]\ni t\to 0} \int_t^1 f_t = \lim_{(0,1]\ni t\to 0} \frac{2}{\ln 3} \cdot (3 - 3^{\sqrt{t}}) = \frac{2}{\ln 3} \cdot (3 - 3^0) = \frac{4}{\ln 3}.$$

Aufgabe 6 (3 + 4 + 4 = 11 Punkte)**.** Sei

$$f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in (-1,1)$ absolut konvergiert (in $\mathbb{R}$).
2. Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $(-1,1)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung von f.
3. Zeigen Sie, dass $f(x) = \ln(x+1)$ für alle $x \in [0, 1/2]$ gilt.

Lösung:

1. Für jedes $x \in (-1,1)$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ konvergiert daher absolut.

   [Alternativ kann man das Quotientenkriterium verwenden].

2. Für jedes $x \in (-1,1)$ existiert ein $r \in (0,1)$ mit $x \in [-r,r] \subset (-1,1)$ (z.B. $r = 1/2 \cdot (|x| + 1)$). Die Reihe konvergiert auf $[-r,r]$ nach dem ersten Teil absolut, daher ist die Potenzreihenfunktion differenzierbar auf $(-r,r)$ und lässt sich dort formal ableiten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(z \mapsto (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n} \Big)'(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1 \cdot x)^n \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

   (im letzten Schritt haben wir die explizite Berechnung des Grenzwerts geometrischer Reihen verwendet). Aus der Lokalität der Ableitung folgt damit die Behauptung.

3. Die Funktionen $x \longmapsto \log(x+1)$ und f sind auf $[0, 1/2]$ stetig und es gilt nach Teil 2, dass
$$\forall_{x \in (0,1/2)} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = \ln(\,\cdot\, + 1)'(x).$$
Zudem gilt $f(0) = 0 = \ln(0+1)$. Daher stimmen die beiden Funktionen auf $[0, 1/2]$ überein (Korollar zum Mittelwertsatz).

[Alternativ kann man auch über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung argumentieren].

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $V \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion auf V. Sei $x \in V$ ein Punkt mit $f'(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subset V$ mit $x \in U$ gibt, für die die Einschränkung

$$f|_U \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Lösung: Sei ohne Einschränkung $f'(x) > 0$. Dann ist auch $\varepsilon := f'(x)/2 > 0$ und da f' nach Voraussetzung stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $U := (x-\delta, x+\delta) \subset V$ und $f'((x-\delta, x+\delta)) \subset (f'(x) - \varepsilon, f'(x) + \varepsilon) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Nach Definition von U gilt für alle $y, z \in U$ mit $y < z$ bereits $[y, z] \subset U$. Also folgt mit dem Mittelwertsatz, dass

$$\forall_{y,z \in U} \quad y < z \Longrightarrow \exists_{\xi \in (y,z) \subset U} \quad 0 < f'(\xi) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

und daher insbesondere

$$\forall_{y,z \in U} \quad y < z \Longrightarrow f(y) < f(z).$$

Somit ist $f|_U$ streng monoton wachsend und insbesondere injektiv. Der Fall $f'(x) < 0$ folgt analog.
[Alternativ folgere man die Existenz von U mittels einer der anderen Definitionen von Stetigkeit.]