Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser Blatt 0 vom 13. April 2018

Aufgabe 1 (Kategorien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist X ein Objekt einer Kategorie C, so ist $\operatorname{Mor}_C(X,X) \neq \emptyset$.
2. Sind X und Y Objekte in einer Kategorie C, so ist $\operatorname{Mor}_C(X,Y) \neq \emptyset$.

Aufgabe 2 (eindeutige Morphismen)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \operatorname{Ob}(C)$.

1. Zeigen Sie, dass es nur genau einen Identitätsmorphismus für X in C gibt.
2. Zeigen Sie: Ist $Y \in \operatorname{Ob}(C)$ und ist $f \in \operatorname{Mor}_C(X,Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es genau einen zu f inversen Isomorphismus in $\operatorname{Mor}_C(Y,X)$.
3. Wie können Sie aus diesen Aussagen die Eindeutigkeit neutraler Elemente bzw. inverser Elemente in Gruppen ableiten?

Aufgabe 3 (glatte Funktionen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Definieren Sie die Kategorie Open_n der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und Inklusionen solcher Teilmengen und weisen Sie nach, dass es sich dabei um eine Kategorie handelt.
2. Definieren Sie den kontravarianten Funktor $C^\infty\colon \mathsf{Open}_n \longrightarrow \mathsf{Vect}_\mathbb{R}$ der glatten Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und Einschränkung solcher Funktionen und weisen Sie nach, dass es sich dabei um einen Funktor handelt.

Hinweis. Falls Sie Analysis II noch nicht gehört haben, können Sie sich auf den Fall $n = 1$ beschränken.

Aufgabe 4 (Null)**.** Sei C eine Kategorie. Ein *Nullobjekt in C* ist ein Objekt $N \in \operatorname{Ob}(C)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}(C)$ gibt es genau einen Morphismus in $\operatorname{Mor}_C(X,N)$ und genau einen Morphismus in $\operatorname{Mor}_C(N,X)$.

1. Zeigen Sie, dass die Kategorien $\mathsf{Vect}_\mathbb{R}$, Group, ${}_\mathbb{Z}\mathsf{Mod}$ jeweils ein Nullobjekt besitzen.
2. Besitzt die Kategorie Set ein Nullobjekt? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Zeigen Sie: Falls eine Kategorie ein Nullobjekt besitzt, so ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bonusaufgabe (Functor)**.** Was hat die Typklasse Functor in der Programmiersprache Haskell (http://www.haskell.org) mit Funktoren im Sinne der Kategorientheorie zu tun?
Hinweis. Betrachten Sie die Kategorie, deren Objekte Haskell-Typen und deren Morphismen Haskell-Funktionen sind ...

---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen