Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 12 vom 29. Juni 2018

Aufgabe 1 (Homologie). Sei R ein ninoko Ring, seien $C = (C_*, \partial_*)$ bzw. $C' = (C'_*, \partial'_*)$ Ketttenkomplexe von R-Linksmoduln und sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $C_n \cong_R C'_n$, so folgt $H_n(C) \cong_R H_n(C')$.
2. Ist $H_n(C) \cong_R H_n(C')$, so folgt $C_n \cong_R C'_n$.

Aufgabe 2 (Dedekind, geometrisch).

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k := R/m$. Zeigen Sie, dass $\dim_k m/m^2 = 1$ gilt.
2. Folgern Sie: Der Ring $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)]$ ist *kein* Dedekindring.

   Hinweis. Aufgabe 4 von Blatt 8.

Aufgabe 3 (Dedekind, algebraisch). Bearbeiten Sie einen der beiden folgenden Aufgabenteile:

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $x \in Q(R)$. Zeigen Sie: Wenn es ein normiertes Polynom $f \in R[T] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$ gibt, so ist $x \in R$.

   Hinweis. Ist $x \notin R$, so ist $1/x \in R$ (warum?). Wie hilft nun $f(x)$?
2. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ *kein* Dedekindring ist.

   Hinweis. Es ist $(2, 1 + \sqrt{5})$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ und den goldenen Schnitt sollte man immer im Auge behalten.

Aufgabe 4 (noethersch vs. artinsch). Sei R ein Ring und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und maximale Ideale $m_1, \dots, m_n \subset R$ mit $m_1 \cdot \dots \cdot m_n = (0)$. Zeigen Sie, dass R in dieser Situation genau dann noethersch ist, wenn R artinsch ist.
Hinweis. Betrachten Sie die R/m_j-Vektorräume $m_1 \cdot \dots \cdot m_{j-1}/m_1 \cdot \dots \cdot m_j$ und Kettenbedingungen von Untermoduln. Wie vererben sich diese Kettenbedingungen durch die einzelnen Stufen? Was hat die Dimension eines Vektorraums mit auf-/absteigenden Ketten von Untervektorräumen zu tun? Beginnen Sie im Zweifel mit kleinen Werten für n.

Bonusaufgabe (Gegenbeispielkonstruktionsmaschine). Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann liefern die komponentenweise Addition und

$$\begin{aligned}(R \times M) \times (R \times M) &\longrightarrow R \times M \\ \big((r, x), (r', x')\big) &\longrightarrow (r \cdot r', r \cdot x' + r' \cdot x)\end{aligned}$$

eine Ringstruktur auf $\widetilde{R} := R \times M$.

1. Wie sehen die Primideale von $\widetilde{R}$ aus?
2. Wann ist $\widetilde{R}$ noethersch?
3. Verwenden Sie diese Konstruktion, um einen nulldimensionalen Ring zu finden, der *nicht* noethersch ist.

Abgabe bis zum 6. Juli 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen