

# Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 13 vom 6. Juli 2018

---

**Aufgabe 1 (Homotopie).** Sei  $R$  ein noetherischer Ring, seien  $C = (C_*, \partial_*)$  bzw.  $C' = (C'_*, \partial'_*)$  Kettenkomplexe von  $R$ -Linksmoduln und sei  $f: C \rightarrow C'$  eine Kettenabbildung. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist  $f$  eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist  $f_n: C_n \rightarrow C'_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Isomorphismus.
2. Ist  $f$  eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist  $H_n(f): H_n(C) \rightarrow H_n(C')$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Isomorphismus.

**Aufgabe 2 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen).** Sei  $R$  ein noetherischer Ring und sei  $M \in \text{Mod}_R$ .

1. Konstruieren Sie einen geeigneten Funktor  $M \otimes_R \cdot : {}_R\text{Ch} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\text{Ch}$  (indem Sie gradweise das Tensorprodukt von Kettenmoduln und Randoperatoren bilden).
2. Zeigen Sie, dass dieser Funktor  $M \otimes_R \cdot$  Kettenhomotopien auf Kettenhomotopien abbildet.

**Aufgabe 3 (eine Charakterisierung von Projektivität).** Sei  $R$  ein noetherischer Ring und sei  $P$  ein  $R$ -Linksmodul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der  $R$ -Modul  $P$  ist projektiv.
2. Der Funktor  ${}_R\text{Hom}(P, \cdot): {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod}$  ist exakt.

**Aufgabe 4 (Syzygy).**

1. Schlagen Sie die Bedeutung des Wortes „Syzygy“ nach.
2. Sei  $R$  ein noetherscher Ring und sei  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Zeigen Sie, dass  $M$  eine projektive Auflösung  $(P, \varepsilon)$  besitzt, bei der für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Modul  $P_n$  endlich erzeugt ist.

**Bonusaufgabe (algorithmische homologische Algebra).** Schreiben Sie (in einer Programmiersprache Ihrer Wahl) ein Programm, das die Homologie von (gradweise endlich erzeugten) Kettenkomplexen von  $\mathbb{Z}$ -Moduln berechnet. Überlegen Sie sich dazu zunächst, wie Sie Kettenkomplexe und die Ergebnisse überhaupt vernünftig repräsentieren können.

---

freiwillige Abgabe bis 13. Juli, 10:00, in die Briefkästen