

# Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 14 vom 13. Juli 2018

---

**Aufgabe 1** (Tor). Sei  $R$  ein noetherischer Ring,  $M \in \text{Ob}(\text{Mod}_R)$  und  $N \in \text{Ob}({}_R\text{Mod})$ . Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist  $M$  projektiv, so ist  $\text{Tor}_1^R(M, N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$ .
2. Ist  $\text{Tor}_1^R(M, N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$ , so ist  $M$  projektiv.

**Aufgabe 2** (mehr Tor). Wir betrachten die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[X, Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X, Y]^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}[X, Y] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\ & & & & 1 & \longmapsto & (X, -Y) & & & & \\ & & & & & & (f, g) & \longmapsto & Y \cdot f + X \cdot g & & \end{array}$$

in  ${}_{\mathbb{C}[X, Y]}\text{Mod}$ . Dabei fassen wir  $\mathbb{C}$  via  $\mathbb{C} \cong_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X, Y]/(X, Y)$  als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modul auf und  $\varepsilon: \mathbb{C}[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet die zugehörige kanonische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass die obige Sequenz eine projektive Auflösung von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modul ist und bestimmen Sie  $\text{Tor}_n^{\mathbb{C}[X, Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Gibt es eine kürzere projektive Auflösung von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modul? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 3** (lokal frei vs. projektiv). Sei  $R$  ein Ring und sei  $M$  ein endlich präsentierter  $R$ -Modul, d.h. für ein geeignetes  $d \in \mathbb{N}$  gibt es einen Epimorphismus  $R^d \rightarrow M$ , dessen Kern endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der  $R$ -Modul  $M$  ist projektiv.
2. Für jedes  $p \in \text{Spec } R$  ist  $M_p = R_p \otimes M$  ein freier  $R_p$ -Modul.

**Aufgabe 4** (Atiyah-MacDonald). Lösen Sie alle Übungsaufgaben im Buch *Introduction to Commutative Algebra* von M.F. Atiyah und I.G. MacDonald (Addison-Wesley Series in Mathematics, Westview Press, 1969).

**Bonusaufgabe** (Skript). Finden Sie so viele Fehler im Skript wie möglich!

---

keine Abgabe