Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 3 vom 27. April 2018

Aufgabe 1 (Tensorquadrate). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \cong_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$.
2. Es gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong_\mathbb{Z} \{0\}$.

Aufgabe 2 (Tensorprodukt und Ideale). Sei R ein Ring und seien $a, b \subset R$ Ideale in R. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} R/a \otimes_R R/b &\longrightarrow R/(a \cup b) \\ [x] \otimes [y] &\longmapsto [x \cdot y] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist. Geben Sie zwei Beweise:

1. indem Sie einen inversen Isomorphismus konstruieren.
2. mithilfe der Verträglichkeit von Tensorprodukten mit Quotienten.

Aufgabe 3 (Tensorprodukte und Isomorphie). Sei $R := \mathbb{Z}[X, Y]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mithilfe eines geeigneten Tensorproduktfunktors:

1. $R \oplus R/(X) \not\cong_R R \oplus R/(X) \oplus R/(X)$
2. $R/(X) \oplus R/(X) \oplus R/(X+1, Y) \not\cong_R R/(X) \oplus R/(X+1, Y) \oplus R/(X+1, Y)$

Aufgabe 4 (Tensorprodukt als Koprodukt). Seien R und S Ringe.

1. Zeigen Sie: die abelsche Gruppe $R \otimes_\mathbb{Z} S$ bildet bezüglich der folgenden Multiplikation einen Ring:

$$\begin{aligned} (R \otimes_\mathbb{Z} S) \times (R \otimes_\mathbb{Z} S) &\longrightarrow R \otimes_\mathbb{Z} S \\ (x \otimes y, x' \otimes y') &\longmapsto (x \cdot x') \otimes (y \cdot y') \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass $R \otimes_\mathbb{Z} S$ zusammen mit den folgenden Abbildungen das Koprodukt von R und S in der Kategorie Ring bildet:

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R \otimes_\mathbb{Z} S \\ x &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} S &\longrightarrow R \otimes_\mathbb{Z} S \\ x &\longmapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (Tensorprodukt von Körpern). Wir betrachten $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i)$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ und auf den Tensorprodukten die Ringstruktur, die analog zu Aufgabe 4 definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *kein* Körper ist.
2. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}(i)$ zum Kompositum $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cdot \mathbb{Q}(i)$ in $\mathbb{C}$ isomorph ist.

Bonusaufgabe (alternative Bonusaufgabe, falls Algebra noch nicht gehört wurde). Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der reellen Addition/Multiplikation einen Körper bildet und dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als Ring zum Restklassenring $\mathbb{Q}[T]/(T^2 - 2)$ isomorph ist.

Abgabe bis zum 4. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen