Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 5 vom 11. Mai 2018

Aufgabe 1 (affine algebraische Mengen)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $V, W \subset K^n$ affine algebraische Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Dann ist auch $V \cap W$ eine affine algebraische Menge.
2. Dann ist auch $V \setminus W$ eine affine algebraische Menge.

Aufgabe 2 (Nullstellenmengen vs. Ideale)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine affine algebraische Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{V}_K\bigl(\mathbf{I}_K(V)\bigr) = V.$$

Aufgabe 3 („Octdong" und „Tuelle")**.** Wir betrachten die Polynome

$$f := X^2 + Y^2 + Z^4 - Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$
$$g := Y \cdot Z \cdot (X^2 + Y - Z) \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$

in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ und die zugehörigen affinen algebraischen Mengen $V := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ bzw. $W := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(g)$ in $\mathbb{R}^3$.

1. Verwenden Sie ein Computer-Algebra-System Ihrer Wahl, um graphische Darstellungen von V und W zu erhalten. Vergessen Sie nicht, die Achsen zu beschriften!
2. Geben Sie zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[V]$ oder zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[W]$ an und begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Der Körper $\mathbb{R}$ ist *nicht* algebraisch abgeschlossen!

Aufgabe 4 (Nilradikal und Restklassenringe)**.** Sei R ein Ring und sei $N(R) \subset R$ das Nilradikal von R (Aufgabe 4 von Blatt 4).

1. Zeigen Sie: Der Restklassenring $R/N(R)$ enthält außer der Null *keine* nilpotenten Elemente.

   Hinweis. Ein Element $x \in R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $x^n = 0$ gibt.
2. Zeigen Sie: Ist S ein Ring, der außer der Null keine nilpotenten Elemente enthält, und ist $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so faktorisiert f eindeutig über einen Ringhomomorphismus $R/N(R) \longrightarrow S$.

Bonusaufgabe (Robotik)**.**

- Wie treten affine algebraische Mengen/Varietäten in der Robotik auf?
- Was sind das *forward* bzw. *inverse kinematics problem*?

Abgabe bis zum 18. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen