Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 9 vom 8. Juni 2018

Aufgabe 1 (vollständig prim?). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Element $1 + T$ ist prim in $\mathbb{Z}[\![T]\!]$.
2. Das Element T ist prim in $\mathbb{Z}[\![T]\!]$.

Aufgabe 2 (Potenzpotenzreihen). Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass die Ringe

$$R[X,Y]_{[\![(X,Y)]\!]} \quad \text{und} \quad \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R[X,Y]/(X^n, Y^n)$$

isomorph sind. Der inverse Limes wird dabei über die kanonischen Projektionen gebildet.
Hinweis. Im allgemeinen ist $(X,Y)^n \neq (X^n, Y^n)$.

Aufgabe 3 (ein algebraisches Möbiusband). Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ und sei

$$A := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} [1+X] & [Y] \\ [Y] & [1-X] \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R).$$

Zeigen Sie, dass der R-Modul $M := \{A \cdot x \mid x \in R^2\}$ lokal frei ist.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $A \cdot A = A$. Wie erhält man daraus eine Zerlegung von R^2 ?

Aufgabe 4 (Spaltereien). Sei R ein Ring. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Modul und gibt es einen R-Modul $\overline{M}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $M \oplus \overline{M} \cong_R R^n$, so folgt: Für jeden surjektiven R-Modulhomomorphismus $f \colon N \longrightarrow M$ gibt es einen *Rechtsspalt*, d.h. einen R-Modulhomomorphismus $\sigma \colon M \longrightarrow N$ mit $f \circ \sigma = \mathrm{id}_M$.

2. Zeigen Sie: Ist $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$, so besitzt f genau dann einen Rechtsspalt, wenn i einen Linksspalt besitzt.

3. Zeigen Sie: Ist $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ und besitzt f einen Rechtsspalt, so ist für jeden R-Modul N die Sequenz

$$0 \longrightarrow N \otimes_R K \xrightarrow{N \otimes_R i} N \otimes_R M \xrightarrow{N \otimes_R f} N \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

exakt.

Bonusaufgabe (adische Topologie). Lesen Sie Anhang A.2 über die adische Topologie. Zeigen Sie, dass die adische Vervollständigung als Vervollständigung bezüglich der adischen Topologie aufgefasst werden kann (liefern Sie also einen Beweis von Proposition A.2.4).

Abgabe bis zum 15. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen