# Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 10 vom 19. Juni 2018

---

**Aufgabe 1** (noethersche Ringe). Welche der folgenden Ringe sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}[X, Y, Z]_{(X,Y)}$
2. $\mathbb{Z}[X_0, X_1, X_2, \dots]/(X_0, X_1, X_2, \dots)$
3. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$
4. $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2 - X^3)$

**Aufgabe 2** (Moduln vs. Algebren). Welche der folgenden Ringe sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln? Welche sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebren? Welche sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}/(2018)$
2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}[T]$
4. $\mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1)$
5. $\mathbb{Z}[X_0, X_1, X_2, \dots]$
6. $\mathbb{Z}[\![T]\!]$
7. $\mathbb{Q}$
8. $\mathbb{Z}_5$

**Aufgabe 3** (primäre Ideale). Welche der folgenden Ideale sind primär?

1. $(42)$ in $\mathbb{Z}$
2. $(121)$ in $\mathbb{Q}$
3. $(T^{2018})$ in $\mathbb{R}[T]$
4. $(T^2 - 1)$ in $\mathbb{R}[T]$

**Aufgabe 4** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4.1 und 4.2 (Noethersche Ringe und Moduln, Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind noethersche Ringe?
2. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben noethersche Ringe bzw. Moduln/Algebren über noetherschen Ringen?
3. Wie beweist man den Hilbertschen Basissatz? Wie beweist man den Hilbertschen Nullstellensatz?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal die Klassifikation der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen!

---

keine Abgabe!