

# Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 11 vom 26. Juni 2018

---

**Aufgabe 1** (Noether, Artin und Dedekind). Welche der folgenden Ringe sind noethersch? Artinsch? Dedekindsch?

1.  $\mathbb{Z}/(2018)$
2.  $\mathbb{Q}[X, Y]$
3.  $\mathbb{Z}[X, Y]/(Y - X^2)$
4.  $\mathbb{Z}_{(5)}[T]$
5.  $\mathbb{Z}_{(5)}$

**Aufgabe 2** (diskrete Bewertungsringe). Welche der folgenden Ringe sind diskrete Bewertungsringe?

1.  $\mathbb{R}[T]/(T^2 + 2018)$
2.  $\mathbb{R}[T]_{(T^2+2018)}$
3.  $\mathbb{Z}_{(5)} \times \mathbb{Z}_{(2017)}$
4.  $\mathbb{Z}_{2017}$

**Aufgabe 3** (Quiz zu Kapitel 4). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist  $R$  ein Ring, der ein endlich erzeugtes Ideal enthält, so ist  $R$  noethersch.
2. Ist  $R$  ein noetherscher Ring, so ist auch  $R[X, Y]$  noethersch.
3. Ist  $R$  ein noetherscher Ring, so ist nach dem Artin-Tate-Lemma jede endlich erzeugte  $R$ -Algebra auch als  $R$ -Modul endlich erzeugt.
4. Ist  $R$  ein noetherscher Ring, so ist ein Ideal  $q \subset R$  genau dann primär, wenn  $\sqrt{q}$  maximal ist.
5. Ist  $R$  ein artinscher Ring, so besitzt jedes Ideal von  $R$  eine Primärzerlegung.
6. Ist  $R$  ein Dedekindring, so ist auch  $R[T]$  ein Dedekindring.

**Aufgabe 4** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4.3, 4.4, 4.5 (Primärzerlegung, artinsche Ringe, Dedekindringe); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Primärzerlegungen? Wann existieren sie? Wie eindeutig sind sie?
2. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben artinsche Ringe?
3. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben Dedekindringe?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein? Wozu sind diese Begriffe gut?

---

keine Abgabe!