

# Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 13 vom 10. Juli 2018

---

**Aufgabe 1** (projektive Auflösungen). Geben Sie jeweils mindestens zwei nicht-isomorphe projektive Auflösungen an!

1. von  $\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul.
2. von  $\mathbb{Z}/2$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul.
3. von  $\mathbb{Z}[T]/(T)$  als  $\mathbb{Z}[T]$ -Modul.
4. von  $\mathbb{Z}[T]$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul.

**Aufgabe 2** (Tor). Beschreiben Sie die folgenden Moduln möglichst explizit!

1.  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2018, \mathbb{Z}/2019)$
2.  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{R}}(C([0, 1], \mathbb{R}), C([0, 1], \mathbb{R}))$
3.  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[X, Y]}(\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2), \mathbb{C}[X, Y])$
4.  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Q}[T]}(\mathbb{Q}[T]/(T^2 + T^5) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T + 1), \mathbb{Q}[T]/(T))$
5.  $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Q}[T]}(\mathbb{Q}(T), \mathbb{Q}[T] \oplus \mathbb{Q}[T]/(T^{2018}))$
6.  $\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}[T]/(2, T^2 + T + 1), \mathbb{Z}[T]/(T))$

**Aufgabe 3** (Bibliothek). Wählen Sie fünf Bücher über Homologische Algebra aus und vergleichen Sie diese. Welches hat die schönsten Beispiele? Welches erklärt die Bedeutung der einzelnen Resultate am besten? Welche behandeln auch algorithmische Aspekte? Welche arbeiten mit Modulkategorien? Welche in abelschen Kategorien? Welche verwenden simpliziale Methoden? Welche gehen auf Anwendungen der Homologischen Algebra in anderen Gebieten ein? Welches enthält die meisten Übungsaufgaben?

**Aufgabe 4** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 5.2 und 5.3 (Projektive Auflösungen; Tor); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind projektive Moduln? Was sind projektive Auflösungen?
2. Wie geht die Projektivität im Fundamentalsatz der homologischen Algebra ein?
3. Was ist Tor? Wie kann man Tor beschreiben/konstruieren/berechnen?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
5. Wozu betrachtet man Tor?

---

keine Abgabe!