

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 3 vom 1. Mai 2018

Aufgabe 1 (Tensorprodukt). Bestimmen Sie möglichst einfache/explicite Darstellungen der folgenden Tensorprodukte:

1. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5) \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$
2. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10$
3. $\mathbb{Q}[T]/(T^2) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
4. $\mathbb{Q}[T]/(T^2-1) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
5. $\mathbb{Z}[X, Y]/(2017, X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X, Y]} \mathbb{Z}[X, Y]/(X+1)$
6. $\mathbb{Z}[X, Y]/(2017, X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X, Y]} \mathbb{Z}[X, Y]/(X)$

Aufgabe 2 (Bibliothek). Wählen Sie fünf Bücher über Kommutative Algebra aus und vergleichen Sie diese. Welches hat die schönsten Beispiele? Welches erklärt die Bedeutung der einzelnen Resultate am besten? Welche behandeln auch algorithmische Aspekte? Welche verwenden den Formalismus der Kategorientheorie? Welche Teilgebiete der Kommutativen Algebra werden abgedeckt? Welches enthält die meisten Übungsaufgaben?

Aufgabe 3 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1.1–1.4 (Kategorientheorie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen? Wozu verwendet man diese?
2. Welche Beispiele für diese Begriffe kennen Sie?
3. Versuchen Sie, auch in anderen Vorlesungen Beispiele dafür zu finden!
4. Was sind Kolimiten/inverse Limiten? Wie arbeitet man damit? Welche Beispiele kennen Sie dafür? Welche Funktoren sind mit (Ko)Limiten verträglich?

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1.5 (Tensorprodukt); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Welche universelle Eigenschaft besitzt das Tensorprodukt von Moduln?
2. Wie konstruiert man das Tensorprodukt von Moduln?
3. Welche grundlegenden Eigenschaften besitzt das Tensorprodukt? Wie kann man effizient damit rechnen? Wie hilft die Kategorientheorie dabei?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Alles, was Sie jetzt sicher beherrschen, müssen Sie nicht mühsam vor der Klausur unter Zeitdruck lernen ...

keine Abgabe!