

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 4 vom 8. Mai 2018

Aufgabe 1 (Primspektren). Wieviele Punkte enthalten die folgenden Primspektren? Welche der Punkte sind abgeschlossen in der Zariski-Topologie?

1. $\text{Spec } \mathbb{Z}/(2018)$
2. $\text{Spec } \mathbb{Q}[T]/(T^2 + T)$
3. $\text{Spec } \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1)$
4. $\text{Spec } \mathbb{C}[T]/(T^2 + 1)$
5. $\text{Spec } \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(4)$
6. $\text{Spec } \mathbb{Z}/(9) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(99)$

Aufgabe 2 (induzierte Abbildungen auf Primspektren). Sei $i: \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ die kanonische Inklusion und sei $\text{Spec}(i): \text{Spec } \mathbb{C}[T] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}[T]$ die induzierte Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass $\text{Spec}(i)((T + i)) = (T^2 + 1)$.
2. Was ist $\text{Spec}(i)((T - i))$?
3. Was ist $\text{Spec}(i)((T - 2))$?
4. Gibt es ein $p \in \text{Spec } \mathbb{C}[T]$ mit $\text{Spec}(i)(p) = (T^2 + 2018)$?
5. Was ist $\text{Spec}(i)((T - \zeta_3))$? (falls Sie Algebra bereits gehört haben)

Aufgabe 3 (affine algebraische Mengen). Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 (von Hand oder mithilfe eines Computer-Algebra-Systems):

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2 \cdot y^2 = 3\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \cdot y^2 = 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\}$
5. Erinnern Sie sich eigentlich noch an die Hauptachsentransformation?!

Aufgabe 4 (etc.). Formulieren und lösen Sie weitere Aufgaben vom selben Typ!

keine Abgabe!