Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser Blatt 5 vom 15. Mai 2018

Aufgabe 1 (Koordinatenringe)**.** Überlegen Sie sich für jedes der folgenden Polynome f: Wie sieht $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ aus? Was ist $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f))$? Was ist $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$?

1. $X \in \mathbb{R}[X]$
2. $X \in \mathbb{R}[X, Y]$
3. $X^2 \in \mathbb{R}[X]$
4. $X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$
5. $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
6. $X^2 + Y \in \mathbb{R}[X, Y]$
7. $X^2 \cdot (X^2 + Y)^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$

Hinweis. Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $K[X_1, \dots, X_n]$ faktoriell (Satz von Gauß, Satz III.2.2.40).

Aufgabe 2 (Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden affinen algebraischen Mengen $V \subset \mathbb{C}^2$ jeweils zwei Punkte in V. Wie erhält man daraus maximale Ideale von $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[V]$?

1. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2 - Y)$
2. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^2 - X^3)$

Aufgabe 3 (Jacobson-Radikale)**.** Berechnen Sie für die folgenden Ringe das Jacobson-Radikal:

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/(2018)$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}[T]$
5. $\mathbb{Z}/(9)$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 2.1–2.2 (Das Primspektrum, Affine algebraische Geometrie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Primideale/maximale Ideale? Wozu sind sie gut?
2. Welche grundlegenden Eigenschaften besitzt das Primspektrum?
3. Welche geometrischen Interpretationen des Maximalspektrums kennen Sie?
4. Allgemeiner: Wie korrespondieren geometrische zu algebraischen Eigenschaften?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!