

# Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 8 vom 5. Juni 2018

---

**Aufgabe 1** (Primspektren). Beschreiben Sie das Primspektrum der folgenden Ringe möglichst explizit.

1.  $\mathbb{Z}_{(5)}$
2.  $\mathbb{Z}_5$
3.  $\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b \right\}$
4.  $\left( (\mathbb{Z}[T]/(T^{2018} + 2018))_{[T]} \right)_{[T]/1}$

**Aufgabe 2** (Dimension). Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Ringe.

1.  $\mathbb{Z}_{(5)}$
2.  $\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b \right\}$
3.  $\mathbb{Z}[T]_T$
4.  $\mathbb{Z}[T]_{(T)}$
5.  $\mathbb{Z}[T]_{(2)}$
6.  $\mathbb{Z}[T]_{(2,T)}$

**Aufgabe 3** (lokale Trivialität). Geben Sie für jeden der folgenden  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $M$  jeweils ein  $q \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  mit  $M_q \not\cong_{\mathbb{Z}_q} \{0\}$  an.

1.  $\mathbb{Z}$
2.  $\mathbb{Z}/(2)$
3.  $\mathbb{Z}/(2018)$
4.  $\mathbb{Q}$
5.  $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$
6.  $\mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1)$

**Aufgabe 4** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.3 (Lokalisierung und das Primspektrum) und 3.4 (Lokale Eigenschaften); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie kann man Primspektren von Lokalisierungen beschreiben?
  2. Wie kann man Lokalisierungen verwenden, um Dimensionen zu berechnen?
  3. Was sind lokale Eigenschaften von Moduln?
  4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
- 

keine Abgabe!