

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 9 vom 12. Juni 2018

Aufgabe 1 (adische Gleichungen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_{[3]}$ mit $x^2 = 2$.
2. Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_{[7]}$ mit $x^2 = 2$.
3. Es gibt ein $f \in \mathbb{Z}[[T]]$ mit $f \cdot (1 - T) = 1$.
4. Es gibt ein $f \in \mathbb{Z}[[T]]$ mit $f \cdot (2 - T) = 1$.
5. Es gibt ein $f \in \mathbb{Q}[[T]]$ mit $f^3 = T + 1$.

Aufgabe 2 (Quiz zu Kapitel 3). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal, so ist a multiplikativ abgeschlossen.
2. Ist R ein Ring, ist $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sind M und N Moduln über R mit $L_S M \cong_{S^{-1}R} L_S N$, so gilt $M \cong_R N$.
3. Ist R ein Ring und $p \in \text{Spec } R$, so gilt $\dim R = \dim R_p$.
4. Nach dem Lemma von Nakayama ist jeder Modul über einem lokalen Ring endlich erzeugt.
5. Jeder Körper ist ein flacher \mathbb{Z} -Modul.
6. Jeder freie Modul ist lokal frei.
7. Der Ring $\mathbb{Z}[[T]]$ ist (T) -adisch vollständig.

Aufgabe 3 (noethersche Ringe). Welche der folgenden Ringe sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}/(42)$
2. $\mathbb{Q}[[T]]/(T^2 - 1)$
3. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$
5. $\mathbb{C}[[T]]_{T^2+2018}$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.5 (Vervollständigung); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie ist die adische Vervollständigung definiert?
2. Was sind die grundlegenden Eigenschaften adischer Vervollständigungen?
3. Wie kann man das Henselsche Lemma verwenden, um „interessante“ Elemente zu konstruieren?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal Kolimiten und inverse Limiten!

keine Abgabe!