Klausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 16. Juli 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y+X^2-1)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y+X^2-1) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist der Ring R noethersch? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Bestimmen Sie den Koordinatenring $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y+X^2-1)]$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte)**.**

1. Wie beweist man, dass jedes Ideal in einem noetherschen Ring eine Primärzerlegung besitzt? Skizzieren Sie kurz die wichtigsten Beweisschritte!

2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes eingehen.

Aufgabe 3 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$, der mit Kolimiten verträglich ist.

2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R mit $\dim R = 1$, der *kein* Dedekindring ist.

3. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und ein $p \in \operatorname{Spec} R$, so dass R_p noethersch ist, aber R *nicht* noethersch ist.

4. Geben Sie ein Beispiel für einen Körper, der als $\mathbb{Z}$-Modul *nicht* flach ist.

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte)**.**

1. Sei R ein Ring und $m \subset R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass R/m^{2018} ein lokaler Ring ist.

2. Sei R ein lokaler Ring, sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \neq R$, sei M ein endlich erzeugter R-Modul und sei $N \subset M$ ein R-Untermodul mit

$$M = \mathrm{Span}_R(a \cdot M \cup N).$$

Zeigen Sie, dass $M = N$.

Aufgabe 5 (6 + 6 = 12 Punkte)**.**

1. Sei R ein (kommutativer!) Ring, und seien P und Q projektive R-Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch der R-Modul $P \otimes_R Q$ projektiv ist.

2. Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $S \subset C_n$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls C_n. Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \leq |S|.$$