Wiederholungsklausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 4. Oktober 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2, Y - X^2 + 1)$.

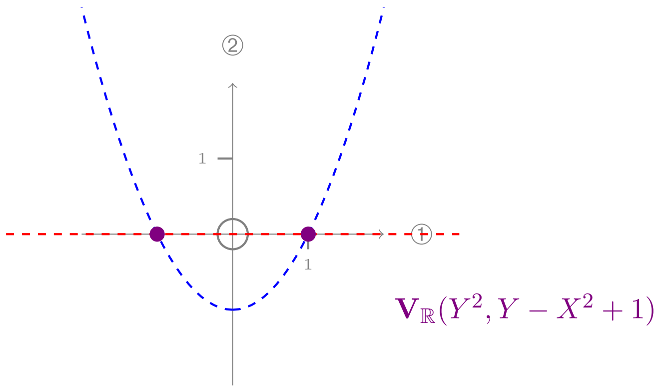
1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_\mathbb{R}(Y^2, Y - X^2 + 1) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Wieviele Elemente enthält $\operatorname{mSpec} R$? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Bestimmen Sie $\dim R$. Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Ist der Ring R isomorph zu $\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2 + 1)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_\mathbb{R}(Y^2, Y - X^2 + 1) &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y^2 = 0 \land y - x^2 + 1 = 0\bigr\}\\ &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = 0 \land x \in \{1, -1\}\bigr\};\end{aligned}$$

somit erhalten wir:



2. Es gilt $|\operatorname{mSpec} R| = 2$, denn: Sei $\pi\colon \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow R$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{mSpec} R &\longrightarrow \bigl\{q \in \operatorname{mSpec} \mathbb{C}[X,Y] \bigm| (Y^2, Y - X^2 + 1) \subset q\bigr\}\\ p &\longmapsto \pi^{-1}(p)\end{aligned}$$

eine inklusionserhaltende Bijektion.

   - Einerseits sind $(X - 1, Y)$ und $(X + 1, Y)$ Elemente der rechten Menge. Also ist $|\operatorname{mSpec} R| \geq 2$.

- Andererseits gilt: Ist $q \in \operatorname{mSpec} \mathbb{C}[X, Y]$ mit $(Y^2, Y - X^2 + 1) \subset q$, so ist $Y \in q$; also ist $(X+1) \cdot (X-1) = Y - (Y - X^2 + 1) \in q$, und damit $(Y, X-1) \subset q$ oder $(Y, X+1) \subset q$.

  Da $(Y, X-1)$ und $(Y, X+1)$ maximal sind, folgt $(Y, X-1) = q$ oder $(Y, X+1) = q$.

  Also ist $|\operatorname{mSpec} R| \leq 2$.

3. Es gilt $\dim R = 0$, denn: Der Ring R ist nicht-trivial (dies folgt zum Beispiel aus dem vorigen Teil). Also ist $\dim R \geq 0$.

   Dasselbe Argument wie im letzten Teil mit $\operatorname{Spec} R$ statt $\operatorname{mSpec} R$ zeigt, dass $\operatorname{Spec} R = \operatorname{mSpec} R$ ist. Insbesondere ist $\dim R \leq 0$.

4. Nein, denn: Das Polynom $Y - X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X, Y]$ ist irreduzibel, und damit prim (da $\mathbb{C}[X, Y]$ faktoriell ist); also ist $(Y - X^2 + 1)$ ein Primideal in $\mathbb{C}[X, Y]$. Analog zum dritten Teil folgt daher

   $$\dim \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 + 1) = 1.$$

   Insbesondere ist der Ring R *nicht* isomorph zu $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 + 1)$.

   Alternativ kann man auch argumentieren, dass $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 + 1)$ im Gegensatz zu R nullteilerfrei ist; eine weitere Möglichkeit ist, zu zeigen, dass $\operatorname{mSpec} \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2 + 1)$ unendlich ist.

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte).

1. Wie zeigt man, dass Flachheit von Moduln eine lokale Eigenschaft ist? Skizzieren Sie kurz die wichtigsten Beweisschritte!
2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man mit dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz $\operatorname{mSpec} K[X_1, \dots, X_n]$ bestimmen?

Lösung:

1. Ist M ein flacher R-Modul und $p \in \operatorname{Spec} R$, so ist die Lokalisierung R_p ein flacher R-Modul, und damit auch $M_p = R_p \otimes_R M$ ein flacher R_p-Modul.

   Sei umgekehrt M ein R-Modul der lokal flach ist, d.h., der die Eigenschaft, dass $M_p = R_p \otimes_R M$ für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ein flacher R_p-Modul ist, besitzt.

   Es genügt zu zeigen, dass der Funktor $M \otimes_R \cdot$ injektive Homomorphismen auf injektive Homomorphismen abbildet.

   Da Injektivität eine lokale Eigenschaft ist, folgt dies aus der lokalen Flachheit von M.

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow \operatorname{mSpec} K[X_1, \dots, X_n] \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \end{aligned}$$

   ist bijektiv, denn:

   - Injektivität: Dies zeigt man mithilfe der entsprechenden Auswertungshomomorphismen.
   - Surjektivität: Sei $m \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal. Nach dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz gibt es dann ein $x \in K^n$ mit

$$\forall_{f \in m} \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

     Also ist $m \subset (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$. Da m maximal ist, folgt $m = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$.

Aufgabe 3 ($3+3+3+3 = 12$ **Punkte**)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$, der exakt ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow S$, für den $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *nicht* surjektiv ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$, für das $\mathbb{C}[X,Y]/p$ *kein* Dedekindring ist.
4. Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{Q}[T]$-Modul, der *nicht* flach ist.

Lösung:

1. Da $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \;\cdot\; : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$ ein exakter Funktor.

   Alternativ ist natürlich auch der Nullfunktor (der jedes Objekt auf „den“ Nullvektorraum und jeden Homomorphismus auf die Nullabbildung abbildet) ein exakter Funktor.

2. Sei $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ die Inklusion. Wegen $|\operatorname{Spec} \mathbb{Q}| = 1$ und $|\operatorname{Spec} \mathbb{Z}| = \infty$ ist insbesondere $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *nicht* surjektiv.

3. Das Nullideal $0 \subset \mathbb{C}[X,Y]$ ist prim und wegen $\dim \mathbb{C}[X,Y]/0 = \dim \mathbb{C}[X,Y] = 2$ ist $\mathbb{C}[X,Y]$ *kein* Dedekindring.

   Alternativ kann man zum Beispiel auch ein maximales Ideal (wie (X,Y)) wählen.

4. Der $\mathbb{Q}[T]$-Modul $M := \mathbb{Q}[T]/(T)$ ist *nicht* flach, denn: Der $\mathbb{Q}[T]$-Modulhomomorphismus

   $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}[T] &\longrightarrow \mathbb{Q}[T] \\ g &\longmapsto T \cdot g \end{aligned}$$

   ist injektiv. Aber

   $$\begin{aligned} M \otimes_{\mathbb{Q}[T]} f\colon M \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T] &\longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T] \\ m \otimes g &\longmapsto [m] \otimes T \cdot g = [m \cdot T] \otimes g = 0 \end{aligned}$$

   ist die Nullabbildung. Da $M \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T] \cong_{\mathbb{Q}[T]} M$ nicht-trivial ist, ist $M \otimes_{\mathbb{Q}[T]} f$ *nicht* injektiv.

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte).

1. Sei R ein noetherscher Ring, sei $m \subset R$ ein maximales Ideal und es gebe einen nicht-trivialen R-Untermodul M von R^{2018} mit $m \cdot M \cong_R \{0\}$. Zeigen Sie, dass R *kein* lokaler Ring ist.

2. Sei R ein nicht-trivialer noetherscher Ring, für den $\operatorname{Spec} R$ ein diskreter topologischer Raum ist (d.h. jede Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ ist offen). Zeigen Sie, dass R artinsch ist.

Lösung:

1. *Angenommen,* der Ring R wäre lokal. Da m dann das maximale Ideal ist, ist m im Jacobson-Radikal von R enthalten.

   Da R noethersch ist, ist der Untermodul M von R^{2018} ein endlich erzeugter R-Modul.

   Mit dem Lemma von Nakayama folgt somit $M \cong_R \{0\}$, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass M nicht-trivial ist.

   Also ist der Ring R *nicht* lokal.

2. Da R ein nicht-trivialer noetherscher Ring ist, genügt es zu zeigen, dass $\dim R \leq 0$ ist.

   Seien $p, q \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \subset q$. Dann liegt q im Zariski-Abschluss von $\{p\}$. Da die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ nach Voraussetzung diskret ist, ist $\{p\}$ bereits der Abschluss von $\{p\}$. Also ist $q = p$. Insbesondere ist $\dim R \leq 0$.

Aufgabe 5 (6 + 6 = 12 Punkte).

1. Sei R ein Ring und seien P und Q projektive R-Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch der R-Modul $P \oplus Q$ projektiv ist.

2. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ mit $C \simeq_{\mathbb{Z}} D$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \cong_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D).$$

Lösung:

1. Da P und Q projektiv sind, sind P und Q direkte Summanden in freien R-Moduln. Es gibt also freie R-Moduln E und F sowie R-Moduln $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ mit
$$P \oplus \overline{P} \cong_R E \quad \text{und} \quad Q \oplus \overline{Q} \cong_R F.$$
Also ist
$$(P \oplus Q) \oplus (\overline{P} \oplus \overline{Q}) \cong_R (P \oplus \overline{P}) \oplus (Q \oplus \overline{Q}) \cong_R E \oplus F.$$
Da auch $E \oplus F$ ein freier R-Modul ist, ist $P \oplus Q$ ein direkter Summand in einem freien R-Modul. Somit ist $P \oplus Q$ ein projektiver R-Modul.

   Alternativ kann man auch mit der definierenden Eigenschaft projektiver Moduln argumentieren.

2. Seien $f\colon C \longrightarrow D$ und $g\colon D \longrightarrow C$ zueinander inverse $\mathbb{Z}$-Kettenhomotopieäquivalenzen; sei h eine $\mathbb{Z}$-Kettenhomotopie zwischen $g \circ f$ und id_C und k eine zwischen $f \circ g$ und id_D.

   Dann ist $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} h$ (bzw. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} k$) eine $\mathbb{Q}$-Kettenhomotopie zwischen $(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} g) \circ (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} f) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} g \circ f$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C}$ (bzw. zwischen $(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} f) \circ (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} g)$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D}$). Also ist
$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D.$$

   Mit der Homotopieäquivalenz von Homologie folgt daher insbesondere
$$H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \cong_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D).$$