Probeklausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser | 9. Juli 2018

Name: | Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ | Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: | Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3+3+3+3=12$ Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^2)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^2) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Ist $\operatorname{Spec} R$ endlich? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Bestimmen Sie $\dim R$. Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Ist der Ring R artinsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte).

1. Wie beweist man, dass das Tensorprodukt mit Kolimiten verträglich ist? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!

2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis von $\dim K[X_1, \ldots, X_n] \leq n$ eingehen.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor $F\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}/(3)}\mathsf{Mod}$ mit
$$F(\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3) \quad \text{und} \quad F(\mathbb{Z}^2) \not\cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3).$$
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R, für den $\operatorname{mSpec} R$ endlich und $\operatorname{Spec} R$ unendlich ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein primäres Ideal $q \subset \mathbb{C}[X, Y]$ mit $\sqrt{q} \neq q$.
4. Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring R und eine endlich erzeugte R-Algebra A, die als R-Modul *nicht* endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4 ($6+6=12$ Punkte)**.**

1. Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a/m \cdot a \cong_R \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $a = (0)$ ist.

2. Sei R ein Integritätsring und für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gelte $\dim R_p = 0$. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte)**.**

1. Sei R ein Ring, sei P ein projektiver R-Modul und sei Q ein direkter Summand von P. Zeigen Sie, dass dann auch Q ein projektiver R-Modul ist.

2. Sei R ein Ring und seien C und D Kettenkomplexe von R-Linksmoduln. Wie kann man das Koprodukt von C und D in ${}_R\mathsf{Ch}$ konstruieren? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!