Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 10. Januar 2011

Aufgabe 1 (Freie Gruppen und Auflösbarkeit). Zeigen Sie, dass freie Gruppen vom Rang mindestens 2 nicht virtuell auflösbar sind.

Aufgabe 2 ((Nicht) nilpotente semi-direkte Produkte). Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Zu einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ betrachten wir das semi-direkte Produkt $G_A := \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ bezüglich des Homomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, der durch die Operation der Potenzen von A auf $\mathbb{Z}^n$ gegeben ist.

1. Zeigen Sie (ohne den polynomialen Wachstumssatz zu verwenden): Ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
so ist die Gruppe G_A auflösbar aber nicht nilpotent.

   Freiwillige Zusatzaufgabe. Zeigen Sie, dass G_A in diesem Fall auch nicht virtuell nilpotent ist.

2. Ist die Gruppe G_A für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
virtuell nilpotent?

Aufgabe 3 (Auflösbare Gruppen mit exponentiellem Wachstum). Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ eine Matrix, die über $\mathbb{C}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \geq 2$ besitzt. Wir betrachten das zugehörige semi-direkte Produkt $G_A = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ (s. auch Aufgabe 2).

1. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $k \in \mathbb{N}$, so sind die 2^{k+1} Elemente $\sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot A^j \cdot x$ von $\mathbb{Z}^n$ mit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ alle verschieden.

2. Folgern Sie, dass G_A exponentielles Wachstum besitzt.

Aufgabe 4 (Endliche Erzeugtheit und Projektionen auf $\mathbb{Z}$). Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, deren Wachstum nicht exponentiell ist, und für die es einen surjektiven Homomorphismus $\pi \colon G \longrightarrow \mathbb{Z}$ gibt. Zeigen Sie, dass dann auch der Kern von π endlich erzeugt ist.
Hinweis. Wählen Sie ein $g \in G$ mit $\pi(g) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine endliche Menge $S \subset \ker \varphi$ gibt, so dass $\{g\} \cup S$ die Gruppe G erzeugt. Zu $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ sei
$$g_{n,s} := g^n \cdot s \cdot g^{-n} \in \ker \varphi.$$
Zeigen Sie nun, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\ker \varphi$ von der (endlichen!) Menge $\{g_{n,s} \mid s \in S, n \in \{-N, \dots, N\}\}$ erzeugt wird.

Abgabe am 17. Januar 2011 (in der Vorlesung), Besprechung am 19. Januar