Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 31. Januar 2011

Aufgabe 1 (Geodäten in hyperbolischen Räumen)**.** Sei (X, d) ein δ-hyperbolischer Raum und seien $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow X$, $\gamma'\colon [0, L'] \longrightarrow X$ Geodäten in X mit

$$\gamma(0) = \gamma'(0) \qquad \text{und} \qquad d\bigl(\gamma(L), \gamma'(L')\bigr) \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass γ und γ' dann gleichmäßig $(2 \cdot \delta + 2)$-nah sind, d.h., dass

$$\forall_{t \in [0, \min(L, L')]} \quad d\bigl(\gamma(t), \gamma'(t)\bigr) \leq 2 \cdot \delta + 2.$$

Aufgabe 2 (Lokale Geodäten in hyperbolischen Räumen)**.** Sei (X, d) ein δ-hyperbolischer Raum und sei $c \in \mathbb{R}_{>8\delta}$. Sei $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow X$ eine *c-lokale Geodäte*, d.h.

$$\forall_{t, t' \in [0, L]} \quad |t - t'| \leq c \Longrightarrow d\bigl(\gamma(t), \gamma(t')\bigr) = |t - t'|.$$

Zeigen Sie: Ist $\gamma'\colon [0, L'] \longrightarrow X$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(L) = \gamma(L')$, so folgt

$$\operatorname{im} \gamma \subset B^{X,d}_{2 \cdot \delta}(\operatorname{im} \gamma').$$

Hinweis. Betrachten Sie einen Punkt in $\operatorname{im} \gamma$, der möglichst großen Abstand von $\operatorname{im} \gamma'$ hat und betrachten Sie ein geeignetes geodätisches Viereck, das $\operatorname{im} \gamma$ und $\operatorname{im} \gamma'$ verbindet und auf dessen einer Seite dieser Punkt liegt.

Aufgabe 3 (Quasi-Isometrie-Starrheit von $\mathbb{Z}$)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, die zu $\mathbb{Z}$ quasi-isometrisch ist, sei $g \in G$ ein Element unendlicher Ordnung (ein solches existiert in dieser Situation immer, s. Vorlesung), und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem von G.

1. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle $h \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $d_S(h, g^n) \leq c$.
2. Folgern Sie, dass die unendlich zyklische Untergruppe $\langle g \rangle_G$ endlichen Index in G hat.

Aufgabe 4 (Quasi-konvexe Untergruppen)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Eine Untergruppe H von G ist *quasi-konvex bezüglich S*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Geodäte in $|\operatorname{Cay}(G, S)|$, deren Start- und Endpunkt in H liegt, ist c-nah an den Knoten aus H.

1. Zeigen Sie: Ist $H \subset G$ eine bezüglich S quasi-konvexe Untergruppe, so ist H endlich erzeugt und der Inklusionshomomorphismus $H \longrightarrow G$ ist eine quasi-isometrische Einbettung.
2. Gilt auch die Umkehrung? Ist also jede endlich erzeugte Untergruppe H von G, für die der Inklusionshomomorphismus $H \longrightarrow G$ eine quasi-isometrische Einbettung ist, bereits quasi-konvex bezüglich S?

Abgabe am 7. Februar (in der Vorlesung), Besprechung am 9. Februar