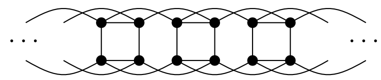
Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 15 vom 10. Februar 2011

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den Stoff der Vorlesung nochmal zu wiederholen.

Aufgabe 1 (Cayley-Graphen)**.**

1. Gibt es eine endlich erzeugte Gruppe G mit endlichem Erzeugendensystem S, so dass der zugehörige Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ ein Baum ist, in dem alle Knoten Grad 3 haben?
2. Gibt es eine endlich erzeugte Gruppe G mit endlichem Erzeugendensystem S, so dass der zugehörige Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ zu

   isomorph ist?

Aufgabe 2 (Gruppenoperationen)**.**

1. Sei G eine Gruppe und seien $a, b \in G \setminus \{e\}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Operation von G auf einer nicht-leeren Menge X mit einer disjunkten Zerlegung $X = A \sqcup B$ in nicht-leere Mengen A und B mit

   $$a \cdot b \cdot A \subset A \qquad \text{und} \qquad b \cdot a \cdot B \subset B.$$

   Ist dann $\langle a, b \rangle_G$ frei vom Rang 2 ?
2. Gibt es eine eigentliche kokompakte isometrische Operation von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3 (Quasi-Isometrien von Gruppen)**.**

1. Seien G und H endlich erzeugte Gruppen und es gebe eine quasi-isometrische Einbettung $G \longrightarrow H$. Gibt es dann auch eine quasi-isometrische Einbettung $H \longrightarrow G$?
2. Für welche endlich erzeugten Gruppen G sind G und $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ quasi-isometrisch?

Aufgabe 4 (Hyperbolische Gruppen/Räume)**.**

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle Geodäten γ und γ' in X die Inklusionsbeziehungen $\operatorname{im}\gamma \subset B_\delta^{X,d}(\operatorname{im}\gamma')$ und $\operatorname{im}\gamma' \subset B_\delta^{X,d}(\operatorname{im}\gamma)$ gelten. Ist X dann bereits hyperbolisch?
2. Gibt es endlich erzeugte Gruppen mit exponentiellem Wachstum, die nicht hyperbolisch sind?

Keine Abgabe