Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 1. November 2010

Aufgabe 1 (Erzeuger und Relationen, Beispiele)**.**

1. Zeigen Sie, dass $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}^2$.
2. Ist die Gruppe $\langle x, y \mid xyx = yxy\rangle$ trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Universelle Eigenschaft für Erzeuger und Relationen)**.** Sei S eine Menge und sei $R \subset (S \cup S^{-1})^*$.

1. Zeigen Sie, dass die von S unter den Relationen R erzeugte Gruppe $\langle S \mid R\rangle$ und die kanonische Abbildung $\pi\colon S \longrightarrow F(S)/\langle R\rangle^{\triangleleft}_{F(S)} = \langle S \mid R\rangle$ die folgende universelle Eigenschaft besitzen: Für jede Gruppe H und jede Abbildung $\varphi\colon S \longrightarrow H$ mit

$$\forall_{r \in R} \quad \varphi^*(r) = e$$

gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon \langle S \mid R\rangle \longrightarrow H$ mit

$$\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi;$$

hierbei ist $\varphi^*\colon (S \cup S^{-1})^* \longrightarrow H$ die induktiv durch $\varphi^*(\varepsilon) = e$ und

$$\forall_{s \in S} \quad \forall_{x \in (S \cup S^{-1})^*} \quad \varphi^*(sx) = \varphi(s) \cdot \varphi^*(x)$$
$$\forall_{s \in S} \quad \forall_{x \in (S \cup S^{-1})^*} \quad \varphi^*(s^{-1}x) = \bigl(\varphi(s)\bigr)^{-1} \cdot \varphi^*(x)$$

definierte Abbildung.

2. Zeigen Sie, dass es bis auf kanonische Isomorphie genau eine Gruppe mit dieser universellen Eigenschaft gibt.

Aufgabe 3 (Die unendliche Diedergruppe)**.** Wir betrachten $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ induzierten Metrik. Die Gruppe $D_\infty := \operatorname{Isom}(\mathbb{Z})$ heißt *unendliche Diedergruppe*. Bestimmen Sie eine Präsentation von D_∞ mit genau zwei Erzeugern (und beweisen Sie, dass diese tatsächlich eine Präsentation von D_∞ ist).

Aufgabe 4 (Positive Relationen)**.** Eine Gruppenpräsentation $\langle S \mid R\rangle$ heißt *positiv*, wenn $R \subset S^*$, d.h., wenn in den Relationen keine negativen Exponenten auftreten. Zeigen Sie, dass es zu jeder endlichen Präsentation $\langle S \mid R\rangle$ eine positive Präsentation $\langle S' \mid R'\rangle$ mit $\langle S' \mid R'\rangle \cong \langle S \mid R\rangle$ und

$$|S'| \leq |S| + 1 \qquad \text{und} \qquad |R'| \leq |R| + 1$$

gibt.

Abgabe am 8. November (in der Vorlesung), Besprechung am 10. November