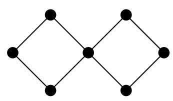
# Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 22. November 2010

---

**Aufgabe 1** (Operationen auf Bäumen)**.**

1. Ist jede Operation einer freien Gruppe auf einem Baum frei?
2. Eine freie Gruppe operiere frei auf einem Graphen $X$. Ist dann $X$ bereits ein Baum?
3. Skizzieren Sie einen Spannbaum für die Operation von $\mathbb{Z}$ auf dem Cayleygraphen $\operatorname{Cay}(F(\{a,b\}),\{a,b\})$ durch Linkstranslation mit den Potenzen von $a$.
4. Welche Gruppen operieren frei auf dem unten skizzierten Graphen?



**Aufgabe 2** (Untergruppen von hohem Rang)**.** Sei $F$ eine freie Gruppe vom Rang mindestens 2. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine freie Untergruppe von $F$ vom Rang mindestens $n$ gibt.

**Aufgabe 3** (Charakterisierung endlicher Bäume)**.** Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph mit $V \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $G$ genau dann ein Baum ist, wenn

$$|E| = |V| - 1$$

gilt.

**Aufgabe 4** (Charakterisierung endlicher zyklischer Gruppen)**.**

1. Bestimmen Sie eine Klasse $C$ von Graphen mit folgende Eigenschaft: Eine Gruppe ist genau dann endlich und zyklisch (d.h. von einem Element endlicher Ordnung erzeugt), wenn sie eine freie Operation auf einem Graphen aus der Klasse $C$ besitzt.
2. Gibt es auch für die Gruppen $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ eine solche Klasse von Graphen?

---

Abgabe am 29. November (in der Vorlesung), Besprechung am 1. Dezember