Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh Blatt 6 vom 29. November 2010

Aufgabe 1 (Quasiisometrie von metrischen Räumen)**.**

1. Sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ (jeweils bezüglich dem gewöhnlichen Abstand auf $\mathbb{R}$) quasiisometrisch?
2. Sind $\mathbb{Z}$ und $\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (jeweils bezüglich dem gewöhnlichen Abstand auf $\mathbb{R}$) quasi-isometrisch?

Aufgabe 2 (Quasiisometrie von Gruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^n$ nicht quasiisometrisch sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und „die“ freie Gruppe vom Rang n nicht quasiisometrisch sind.

Aufgabe 3 (Bilipschitzäquivalenz und Quasiisometrie)**.**

1. Zeigen Sie, dass eine bijektive Quasiisometrie zwischen endlich erzeugten Gruppen bereits eine Bilipschitzäquivalenz ist.
2. Gilt dies auch für allgemeine metrische Räume: ist jede bijektive Quasiisometrie zwischen metrischen Räumen bereits eine Bilipschitzäquivalenz?

Aufgabe 4 (Quasiisometriegruppen)**.**

1. Zeigen Sie, dass die Komposition zweier quasiisometrischer Einbettungen eine quasiisometrische Einbettung ist, und dass die Komposition zweier Quasiisometrien eine Quasiisometrie ist.
2. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $\widetilde{\mathrm{QI}}(X)$ die Menge aller Quasiisometrien $X \longrightarrow X$ und sei $\mathrm{QI}(X) := \widetilde{\mathrm{QI}}(X)/\sim$, wobei "$\sim$" die Äquivalenzrelation ist, die Abbildungen identifiziert, die endlichen Abstand voneinander haben. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{QI}(X) \times \mathrm{QI}(X) &\longrightarrow \mathrm{QI}(X) \\ \bigl([f],[g]\bigr) &\longmapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und dass $\mathrm{QI}(X)$ bezüglich dieser Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (Nikolausaufgabe – 4 Zusatzpunkte). Cay und Ley sind Absolventen des Bachelorstudiengangs „Evaluation von Kinderverhalten und Transportlogistik gemäß der EU-Richtlinie *Nikolaus*“ und diskutieren über die Anordnung der Rentiere vor ihren Schlitten:

Cay Ha, ich habe alle Anordnungen von Rentieren und Schnüren dazwischen, die aussehen wie ein Cayleygraph von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (bezüglich einem endlichen Erzeugendensystem), patentieren lassen!

Ley Ooch, das macht mir gar nichts; der Schlitten ist sowieso schneller, wenn man einen Cayleygraph von $\mathbb{Z}$ nimmt.

Cay Na, dann wirst Du aber eine hübsche Lizenzgebühr an mich zahlen müssen, da ich auf jeden Fall ein endliches Erzeugendensystem S von $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ finde, so dass Dein lahmes Gespann zu $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S)$ isomorph ist.

Ley Hast Du noch alle Zacken am Geweih? Obwohl $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ quasiisometrisch sind, sind $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, S)$ und $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$ für keine endlichen Erzeugendensysteme S und S' von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph.

Können Sie weiterhelfen?

Abgabe am 6. Dezember (in der Vorlesung), Besprechung am 8. Dezember