Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 6. Dezember 2010

Aufgabe 1 (Quasi-geodätische Räume**).** Wir betrachten $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bezüglich der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht geodätisch ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein $(1, \varepsilon)$-quasi-geodätischer Raum ist.

Aufgabe 2 (Švarc-Milnor-Lemma**).** Geben Sie für die folgenden Operationen je eine Voraussetzung des Švarc-Milnor-Lemmas an, die erfüllt ist, und eine, die nicht erfüllt ist:

1. Die Operation von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrixmultiplikation.
2. Die Operation von $\mathbb{Z}$ auf $X := \{(r^3, s) \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$ (mit der Metrik induziert von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$) gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times X &\longrightarrow X \\ \bigl(n, (r^3, s)\bigr) &\longmapsto (r^3, s + n). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 ((Schwache) Kommensurabilität**).** Zeigen Sie, dass „kommensurabel“ bzw. „schwach kommensurabel“ Äquivalenzrelationen auf der Klasse der Gruppen definieren.

Aufgabe 4 (Freie Gruppen und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$**).** Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ und die freie Gruppe vom Rang 2 kommensurabel sind: Sei

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und sei $F := \langle \{a, b\} \rangle_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ die von a und b erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$; diese Gruppe ist frei vom Rang 2 (nach dem Ping-Pong-Lemma). Außerdem betrachten wir die Untergruppen

$$F' := \left\{ \begin{pmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n, r, s \in \mathbb{Z},\ \det \begin{pmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n, r, s \in \mathbb{Z},\ \det \begin{pmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

1. Zeigen Sie, dass $[G : F'] < \infty$ und $[\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) : G] < \infty$.
2. Zeigen Sie, dass $F = F'$ ist.

Hinweis. Betrachten Sie für die Inklusion $F' \subset F$ zunächst den Fall „$n = 0$“ und machen Sie dann vollständige Induktion über $|n| + |m|$.

Abgabe am 13. Dezember (in der Vorlesung), Besprechung am 15. Dezember