Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 20. Dezember 2010

Aufgabe 1 (Wachstumsfunktionen**).** Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion der Gruppe $\mathbb{Z}$ zum Erzeugendensystem $\{2,3\}$.

Aufgabe 2 (Grundlegende Eigenschaften von Wachstumsfunktionen**).** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem.

1. Zeigen Sie, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{G,S}$ submultiplikativ ist:

$$\forall_{r,r' \in \mathbb{N}} \quad \beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r').$$

2. Zeigen Sie: Ist G unendlich, so ist $\beta_{G,S}$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 3 (Wachstumstyp der Heisenberggruppe**).** Sei H die Heisenberggruppe (s. Blatt 3 bzw. 8), d.h.

$$H = \langle x, y, z \mid [x,z], [y,z], [x,y] = z \rangle.$$

Wir schreiben $S := \{x, y, z\}$. Seien außerdem m, n, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie, dass $d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e) \leq |m| + |n| + 6 \cdot \sqrt{|k|}$.
2. Zeigen Sie, dass $|m| + |n| \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)$ und $|k| \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)^2$.
3. Zeigen Sie, dass $1/2 \cdot (|m| + |n| + \sqrt{|k|}) \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)$.
4. Folgern Sie, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{H,S}$ zu einem Polynom vom Grad 4 quasi-äquivalent ist.

Aufgabe 4 (Exponentielle verallgemeinerte Wachstumsfunktionen**).**

1. Zeigen Sie, dass für alle a, $a' \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt, dass $(x \mapsto a^x) \sim (x \mapsto a'^x)$.
2. Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $a' \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $(x \mapsto a^x) \succ (x \mapsto x^{a'})$.
3. Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $a' \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $(x \mapsto a^x) \not\prec (x \mapsto x^{a'})$.
4. Geben Sie eine verallgemeinerte Wachstumsfunktion $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ an mit: $f \prec (x \mapsto e^x)$, $f \not\sim (x \mapsto e^x)$, und $(x \mapsto x^a) \prec f$ für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Bitte wenden

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie Zusatzpunkte erhalten.

Aufgabe 5 **(**(Freie) Produkte und Quasiisometrie; 4 Zusatzpunkte**).** Seien G, G' und H endlich erzeugte Gruppen und seien G und G' quasiisometrisch.

1. Sind dann auch $G \times H$ und $G' \times H$ quasiisometrisch?
2. Sind dann auch $G * H$ und $G' * H$ quasiisometrisch?

Aufgabe 6 **(**Homomorphismen und Quasiisometrie; 4 Zusatzpunkte**).** Geben Sie eine Charakterisierung, wann ein Homomorphismus zwischen endlich erzeugten Gruppen eine Quasiisometrie ist.

Aufgabe 7 **(**Geometrische Eigenschaften; 4 Zusatzpunkte**).**

1. Ist die Eigenschaft unendlich und torsionsfrei zu sein eine geometrische Eigenschaft von endlich erzeugten Gruppen?
2. Ist die Eigenschaft ein freies Produkt zweier nicht-trivialer Gruppen zu sein eine geometrische Eigenschaft von endlich erzeugten Gruppen?

Aufgabe 8 **(**Skript; $4 + ?$ Zusatzpunkte**).** Finden Sie Fehler, Ungenauigkeiten oder Unklarheiten im Skript (Stand vom 21. Dezember 2010).

[Es fehlen noch viele Referenzen und Querverweise – Punkte erhalten Sie für diese nur, wenn Sie auch die fehlenden Querverweise bzw. Literaturangaben nennen.]

Abgabe am 10. Januar (in der Vorlesung), Besprechung am 12. Januar

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!