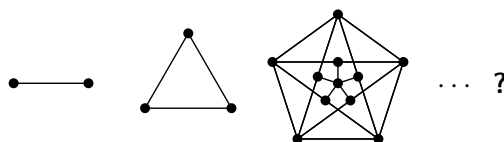


# Seminar „Die probabilistische Methode“

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)  
S. Beier, M. Blank

Februar 2012

Viele Probleme in der Kombinatorik und Graphentheorie können elegant mit Hilfe der probabilistischen Methode gelöst werden. Die zentrale Idee der probabilistischen Methode ist es, die Existenz von gewissen Objekten nicht-konstruktiv dadurch zu zeigen, dass man nachweist, dass Objekte mit positiver Wahrscheinlichkeit die gewünschten Eigenschaften besitzen. Die Kunst besteht dann darin, geeignete Wahrscheinlichkeitsräume zu konstruieren und die Wahrscheinlichkeiten gut abzuschätzen.



Zum Beispiel liefert die probabilistische Methode, dass Graphen mit einem interessanten Spannungsverhältnis zwischen lokalen und globalen Eigenschaften existieren und dass in bestimmten Spielen gewisse Gewinnstrategien existieren. Andererseits kann man mit der probabilistischen Methode aber auch klassische Resultate wie den Approximationssatz von Weierstrass beweisen.

In diesem Seminar werden wir uns sowohl mit klassischen Methoden der Kombinatorik als auch mit der probabilistischen Methode befassen. Die nötigen Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie werden im Seminar bzw. in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie erarbeitet.

## Themen

Als Grundlage für das Seminar werden wir im wesentlichen das Buch *The probabilistic method* [2] von N. Alon und J.H. Spencer verwenden.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

## Grundlagen in Stochastik, Kombinatorik, Graphentheorie

**Vortrag 1** (Grundlagen der diskreten Stochastik). Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, diskrete Zufallsvariablen, Erwartungswert, Ungleichung von Tschebyscheff, Varianz, stochastische Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Beispiele klassischer Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

*Literatur:* Alle Bücher über Wahrscheinlichkeitstheorie

**Vortrag 2** (klassische Techniken der Kombinatorik). Schubfachprinzip, Prinzip der Inklusion/Exklusion, erzeugende Funktionen, Beispiele.

*Literatur:* [7, Kapitel 2.4–2.6]

**Vortrag 3** (Asymptotisches Wachstum von Funktionen). Einführung in die asymptotische Notation ( $O, o, \Theta, \Omega, \dots$ ), Beispiele, die Stirlingsche Formel (mit Beweis, zumindest der schwachen Version).

*Literatur:* [4, Kapitel 2], [6, Kapitel 9.1–9.3], [1, Anhang zu Kapitel 2]

**Vortrag 4** (Einführung in die Graphentheorie). Definition der Grundbegriffe der Graphentheorie, Cayleys Formel zur Anzahl beschrifteter Bäume.

*Literatur:* [7, Kapitel 1.1/1.3], [1, Kapitel 22]

## Die probabilistische Methode in der Graphentheorie

**Vortrag 5** (Zufallsgraphen). Das Modell „ $G(n, p)$ “ für Zufallsgraphen, Eigenschaften von „fast allen“ Graphen, Zusammenhang mit dem Rado-Graph.

*Literatur:* [5, Kapitel 8.3, Kapitel 11.1–11.3 (ohne Anwendungen auf Ramsey-Zahlen bzw. chromatische Zahl!)]

**Vortrag 6** (Ramsey-Zahlen). Definition von Ramsey-Zahlen, einfache Beispiele und Interpretationen, Abschätzung der Ramsey-Zahlen nach oben, probabilistische Abschätzung der Ramsey-Zahlen nach unten.

*Literatur:* [7, Kapitel 1.8], [2, Kapitel 3.1], [5, Kapitel 11.1, Kapitel 9.1]

**Vortrag 7** (Färbungen von Graphen). Definition der chromatischen Zahl, Anwendungen, probabilistischer Beweis der Existenz von Graphen mit großer Taille und großer chromatischer Zahl, Skizze der Konstruktion von Mycielski, lokale Färbungen.

*Literatur:* [7, Kapitel 1.6], [2, PL: High Girth and High Chromatic Number, PL: Local Coloring], [5, Kapitel 11.2], [1, Kapitel 30], [10]

**Vortrag 8** (Expander). Definition des Begriffs Expander, probabilistischer Existenzbeweis, Zusammenhang mit Eigenwerten, zufällige Pfade, Anwendung auf randomisierte Algorithmen.

*Literatur:* [2, Kapitel 9.2]

## Weitere Anwendungen der probabilistischen Methode

**Vortrag 9** (Der Satz von Weierstrass). Formulierung des Satzes von Weierstrass, klassischer Beweis, probabilistischer Beweis.

*Literatur:* [2, PL: Weierstrass Approximation Theorem], [8, Kapitel XI]

**Vortrag 10** (Randomisierte Strategien). Randomisierte Gewinnstrategien für gewisse Spiele (z.B. für das Lügner-Spiel).

*Literatur:* [2, Kapitel 15.2–15.4]

**Vortrag 11** (Das lokale Lemma). Das lokale Lemma (allgemeiner und symmetrischer Fall) mit Beweis, Hypergraphen, Überdeckungen von  $\mathbf{R}^3$ .

*Literatur:* [2, Kapitel 5.1/5.2/5.4]

**Vortrag 12** (Zufall in der Geometrie). Minimale Fläche von Dreiecken, Packungsungleichungen, größte Winkel, leere Dreiecke.

*Literatur:* [2, Kapitel 3.3/3.4, Kapitel 14.1/14.2]

## Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden. Bei geteilten Vorträgen müssen beide Teilnehmer eine eigene Ausarbeitung abgeben – der jeweils andere Teil soll darin kurz zusammengefasst werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

## Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>  
<http://www.ams.org/mathscinet>  
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem  $\text{\LaTeX}$  besser kennenzulernen [9]; dafür werden auch  $\text{\LaTeX}$ -Vorlagen zur Verfügung gestellt:  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/probsem\\_ss12/](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/probsem_ss12/)
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

## Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

## Literatur

- [1] M. Aigner, G. Ziegler. *Proofs from the BOOK*, erste Auflage, Springer, 1998.
- [2] N. Alon, J.H Spencer. *The probabilistic method*, dritte Auflage, Wiley, 2008.  
Die zweite Auflage ist elektronisch über den Regensburger Katalog verfügbar.
- [3] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.  
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [4] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1990.
- [5] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.
- [6] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics: Foundation for Computer Science*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 1994.
- [7] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
- [8] S. Lang. *Undergraduate Analysis*, zweite Auflage, Springer, 2010.
- [9] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.  
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [10] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes. *Colloq. Math*, 3, S. 161–162, 1955.
- [11] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*,  
<http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>  
Dokumentation des TikZ-Pakets für L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X zu erstellen.