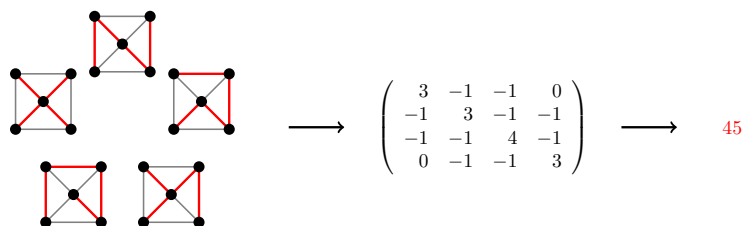


Proseminar: Perlen der Linearen Algebra

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Februar 2017

Dieses Proseminar ergänzt die Vorlesungen Lineare Algebra I/II aus dem Wintersemester 2016/17 bzw. Sommersemester 2017. Wir werden uns mit verschiedenen Aspekten der Linearen Algebra beschäftigen, zum Beispiel mit Anwendungen in der Kombinatorik und der Graphentheorie. Dabei werden wir viele Techniken und einige kuriose Anwendungen kennenlernen.



Themen

Graphentheorie

Vortrag 1 (Grundlagen der Graphentheorie). Graphen, Beispiele für Graphen, vollständige Graphen, zyklische Graphen, Adjazenzmatrix und geometrische Bedeutung der Potenzen, Spurformeln, Inzidenzmatrix, Spektrum eines Graphen (mit Vielfachheiten), Eigenwerte von regulären Graphen und Komplementen, Beispiele.

Literatur: [4, Kapitel 1.1, 1.7, 8.1, 8.2, 8.5]

Vortrag 2 (Spannbäume-Zählen via Determinante). Definition von Spannbäumen, Beispiele, Formulierung des Matrix-Baum-Satzes, Definition der Laplace-Matrix, Beispiele, Beweis des Matrix-Baum-Satzes.

Literatur: [5, Miniature 21]

Vortrag 3 (Der Petersen-Graph). Definition des Petersen-Graphs, grundlegende Eigenschaften, drei Petersen-Graphen genügen nicht um K_{10} zu überdecken (mit Beweis), Moore-Graphen, Moore-Graphen mit Tailleweite 5 haben Grad 1, 3, 7 oder 57 (mit Beweis).

Literatur: [5, Miniature 13, 14]

Vortrag 4 (Günstiges Zerlegen von Graphen). Spektrale Partitionierung von Graphen (mit Beweis).

Literatur: [5, Miniature 31]

Euklidische Abstände

Vortrag 5 (Euklidische Abstände). Satz (mit Beweis) über ungerade Abstände in der Ebene; notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realisierbarkeit als euklidische Abstände (mit Beweis), Beispiele.

Literatur: [5, Miniature 6, 7]

Vortrag 6 ((Fast) gleichseitige Mengen). Abschätzung von euklidischen Punktmengen mit höchstens zwei Abstandstypen (mit Beweis), Abschätzung für gleichseitige Mengen bezüglich der ℓ^1 -Metrik (mit Beweis), Beispiele.

Literatur: [5, Miniature 15, 30]

Kombinatorik

Vortrag 7 (Positive Definitheit und extremale Mengenlehre). Beispiele für kombinatorische Sätze über Durchschnitte von Mengen (mit Beweis), Beispielanwendungen.

Literatur: [5, Miniature 3, 4, 17]

Vortrag 8 (Probabilistische Tests für algebraische Operationen). Probabilistischer Test für Matrix-Multiplikation, der Satz von Schwartz-Zippel (mit Beweis), probabilistischer Test für Assoziativität.

Literatur: [5, Miniature 11, 27]

Datenübertragung

Vortrag 9 (Error correcting codes). Definition der grundlegenden Begriffe (insbesondere Hamming-Abstand), Beispiele, lineare Codes, Hamming-Code, verallgemeinerter Hamming-Code, Eigenschaften des Hamming-Codes (mit Beweis), Beispiele, Ausblick auf Anwendungen.

Literatur: [5, Miniature 5]

Vortrag 10 (Shannon-Kapazität). Definition der Shannon-Kapazität von Graphen, Bestimmung der Shannon-Kapazität von C_5 , Beispiel-Anwendung.

Literatur: [5, Miniature 28]

PageRank

Vortrag 11 (Der Satz von Perron-Frobenius). Spektralradius, Satz von Perron-Frobenius (mit Beweis).

Literatur: [7, Kapitel 17], [4, Kapitel 8.7, 8.8]

Vortrag 12 (Das PageRank-Verfahren). Erklärung des PageRank-Verfahrens als Eigenvektorproblem, Beispiele, einfache Modifikationen, Zusammenhang mit dem Satz von Perron-Frobenius.

Literatur: [1], [3]

Polytope

Vortrag 13 (Polytope). Grundbegriffe zu Polytopen, einfache Beispiele, Fourier-Motzki-Elimination, der Hauptsatz für Polytope mit Beweis.

Literatur: [9, In Kapitel 0: 0.0–0.5; Kapitel 1.1, 1.2]

Vortrag 14 (Ecken, Seiten und Facetten). Ecken, Seiten, Facetten, Farkas-Lemma (mit Beweis), Eigenschaften von Seiten von Polytopen.

Literatur: [9, Kapitel 1.4, 2.1, 2.2]

Vortrag 15 (Polytope: Beispiele). Zyklische Polytope, Permutahedra, Assoziahedra, 0/1-Polytope.

Literatur: [9, In Kapitel 0: 0.6–0.13]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Freiwillig, aber dringend empfohlen: Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese sollte bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen/Modulkatalogen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zu viele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probenvortrag kann helfen, den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [6]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/prosem_ss17/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] D. Austin. How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack, *AMS Feature Column*,
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank>
- [2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
 Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [3] K. Bryan, T. Leise. The \$25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google,
<http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf>
- [4] C. Godsil, G. Royle. *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Band 207, Springer, 2001.
- [5] J. Matoušek. *Thirty-three Miniatures. Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*. AMS Student Mathematical Library, Band 53, AMS, 2010.
- [6] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
 Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [7] H. Shapiro. *Linear Algebra and Matrices. Topics for a Second Course*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Band 24, AMS, 2015.
- [8] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*,
<http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
 Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.
- [9] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Band 152, Springer.