

# Seminar: Endliche Approximation von Gruppen

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Februar 2018

---

Gruppen in ihrer allgemeinsten Form sind zu kompliziert um vernünftig damit arbeiten zu können. In günstigen Fällen lassen sich Gruppen aber durch endliche Objekte approximieren; dies führt zum Beispiel zu residuell endlichen, pro-endlichen und sofischen Gruppen. Approximationen dieser Art können verwendet werden, um solche Gruppen besser zu verstehen.

In diesem Seminar werden wir uns mit endlichen Approximationen von Gruppen und Anwendungen davon in der Galoistheorie, der Graphentheorie und der Geometrie beschäftigen. Außerdem werden wir auf aktuelle offene Probleme in diesem Gebiet eingehen. Jeder Teilnehmer sollte daher versuchen, ein zu seinem Vortrag passendes offenes Problem vorzustellen.

## Themen

### Residuell endliche Gruppen

**Vortrag 1 (Residuell endliche Gruppen).** Definition residuell endlicher Gruppen, Charakterisierungen, grundlegende Eigenschaften, Beispiele (endliche Gruppen,  $\mathbb{Z}^n$ ,  $GL(n, \mathbb{Z})$ ), Beispiele für endlich erzeugte Gruppen, die *nicht* residuell endlich sind.

*Literatur:* [2, Kapitel 2.1, 2.2 (ohne 2.2.7, 2.2.8), 2.4 (ohne 2.4.5), 2.6]

**Vortrag 2 (Freie Gruppen).** Universelle Eigenschaft freier Gruppen, Konstruktion freier Gruppen, reduzierte Wörter, Rang freier Gruppen, Beispiele.

*Literatur:* [3, Kapitel 2.2.2, Kapitel 3.3.1] [2, Anhang D.1, D.2, D.3]

**Vortrag 3 (Ping-Pong).** Das Ping-Pong-Lemma, die freie Gruppe  $F_2$  als Untergruppe von  $SL(2, \mathbb{Z})$ , Folgerung:  $F_2$  ist residuell endlich, Folgerung: Konstruktion kleiner regulärer Graphen mit großer Tailenweite.

*Literatur:* [3, Kapitel 4.3, 4.4.1, 4.4.2] [2, Kapitel D.5, Kapitel 2.3]

**Vortrag 4 (Das Wortproblem).** Präsentationen von Gruppen, endlich präsentierte Gruppen, einfache Beispiele für Präsentationen, das Wortproblem, Lösung des Wortproblems für freie Gruppen, Lösung des Wortproblems für endlich präsentierte residuell endliche Gruppen.

*Literatur:* [3, Kapitel 2.2.3, 2.2.4, S. 224] [5, Theorem IV.4.6] [8, Kapitel 12]

### Pro-endliche Gruppen

**Vortrag 5 (Inverse Limiten und topologische Gruppen).** Inverse Limiten: universelle Eigenschaft und konkrete Konstruktionen, Beispiele und Eigenschaften von inversen Limiten, Charakterisierung pro-endlicher Räume, Grundbegriffe zu topologischen Gruppen.

*Literatur:* [7, Kapitel 1]

**Vortrag 6 (Pro-endliche Gruppen).** Pro- $C$ -Gruppen, Charakterisierung von Pro- $C$ -Gruppen, Beispiele für Pro- $C$ -Gruppen, grundlegende Eigenschaften von Pro- $C$ -Gruppen, Pro- $C$ -Vervollständigung, pro-endliche Vervollständigung von residuell endlichen Gruppen.

*Literatur:* [7, Kapitel 2.1, 2.2]

**Vortrag 7 (Die Sylowsätze für pro-endliche Gruppen).** Der Ordnungsbegriff für pro-endliche Gruppen, Hall-Untergruppen, die Sylowsätze für pro-endliche Gruppen.

*Literatur:* [7, Kapitel 2.3]

**Vortrag 8 (Erzeuger von pro-endlichen Gruppen).** Erzeuger von pro-endlichen Gruppen, endlich erzeugte pro-endliche Gruppen, Ketten von Untergruppen, pro-zyklische Gruppen (alles jeweils mit Beispielen).

*Literatur:* [7, Kapitel 2.4, 2.5, 2.7]

**Vortrag 9 (Unendliche Galoistheorie).** Galoisgruppen als pro-endliche Gruppen, der Hauptsatz der Galoistheorie für unendliche Galoiserweiterungen, Beispiele, Realisierungssatz für pro-endliche Gruppen als Galoisgruppen.

*Literatur:* [7, Kapitel 2.11]

## Sofische Gruppen

**Vortrag 10 (Amenable Gruppen).** Wortmetriken, Følner-Folgen, Amenabilität via Følner-Folgen, Beispiele für (nicht-)amenable Gruppen, Zusammenhang zwischen Mitteln und Følner-Folgen, Vererbungseigenschaften amenabler Gruppen, Zusammenhang mit dem Banach-Tarski-Paradox (Skizze).

*Literatur:* [3, 9.1, 9.2.1 (ohne Wachstum), 9.2.2, 9.2.3, (die metrischen Begriffe sind in Kapitel 5 definiert)] [2, Kapitel 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9, (Kapitel 6)]

**Vortrag 11 (Lokale Einbettbarkeit).** Lokale Einbettbarkeit, Charakterisierungen und Vererbungseigenschaften von lokaler Einbettbarkeit, Zusammenhang mit residuellen Eigenschaften, Ultraprodukte, Charakterisierung lokaler Einbettbarkeit durch Ultraprodukte, LEF-Gruppen.

*Literatur:* [2, Kapitel 7.1, 7.2, 7.3]

**Vortrag 12 (Sofische Gruppen).** Hamming-Metrik, Eigenschaften der Hamming-Metrik, Definition sofischer Gruppen, Beispiele für sofische Gruppen, Vererbungseigenschaften von sofischen Gruppen.

*Literatur:* [2, Kapitel 7.4, 7.5]

**Vortrag 13 (Charakterisierungen sofischer Gruppen).** Charakterisierung sofischer Gruppen durch Ultraprodukte, graphentheoretische Charakterisierung sofischer Gruppen, Ausblick: hyperlineare Gruppen.

*Literatur:* [2, Kapitel 7.6, 7.7] [6]

## Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese sollte bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden. (Wird das Seminar als Proseminar belegt, ist diese schriftliche Ausarbeitung nicht verpflichtend, aber dringend empfohlen.)
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen/Modulkatalogen benotet und angerechnet.

## Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>  
<http://www.ams.org/mathscinet>  
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probenvortrag kann helfen, den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem  $\text{\LaTeX}$  besser kennenzulernen [4]; dafür werden auch  $\text{\LaTeX}$ -Vorlagen zur Verfügung gestellt:  
[http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/resfinsem\\_ss18/](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/resfinsem_ss18/)
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

## Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind. Die logische Struktur sollte immer aus dem Tafelbild erkennbar sein.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

## Literatur

- [1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.  
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [2] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010.
- [3] C. Löh. *Geometric Group Theory. An Introduction*, Universitext, Springer, 2018.
- [4] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.  
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [5] R.C. Lyndon, P.E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*, Nachdruck der Ausgabe von 1977, *Classics in Mathematics*, Springer, 2001.
- [6] V.G. Pestov, A. Kwiatkowska. An introduction to hyperlinear and sofic groups, *Appalachian Set Theory: 2006–2012*, J. Cummings, E. Schimmerling (Hrsg.), *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 406, Cambridge University Press, 2012  
<https://arxiv.org/abs/0911.4266>
- [7] L. Ribes, P. Zalesskii. *Profinite Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*, 40, Springer, 2010.
- [8] J.J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, vierte Auflage, *Graduate Texts in Mathematics*, 148, Springer, 1999.
- [9] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*,  
<http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>  
Dokumentation des TikZ-Pakets für L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X zu erstellen.