Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 19. April 2013

Aufgabe 1 (Homotopieäquivalenzen)**.** Seien X und Y topologische Räume. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ nullhomotop, so ist f keine Homotopieäquivalenz.
2. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig und gibt es stetige Abbildungen $g, h\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

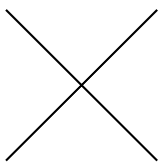
Aufgabe 2 (Automorphismengruppen)**.** Ist C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$, so schreiben wir

$$\mathrm{Aut}_C(X) := \bigl\{ f \in \mathrm{Mor}_C(X,X) \bigm| f \text{ ist ein Isomorphismus in } C \bigr\};$$

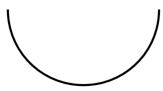
die Elemente von $\mathrm{Aut}_C(X)$ heißen *Automorphismen von X in C*.

1. Zeigen Sie: Ist C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$, so bildet $\mathrm{Aut}_C(X)$ bezüglich der Verknüpfung von Morphismen in C eine Gruppe.
2. Gibt es zu jeder Gruppe G eine Kategorie C und ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ mit $\mathrm{Aut}_C(X) \cong G$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Ein X für ein U?)**.** Wir betrachten die folgenden topologischen Räume (versehen mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$):



$$X := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |x| = |y|,\ x,y \in [-1,1]\bigr\}$$



$$U := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 = 1,\ y \le 0\bigr\}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen und illustrieren Sie Ihre Beweise dabei mit geeigneten Skizzen:

1. Die Räume X und U sind homotopieäquivalent.
2. Die Räume X und U sind nicht homöomorph.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (stereographische Projektion)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} s_n \colon S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

heißt *stereographische Projektion.*

1. Geben Sie eine geometrische Interpretation der stereographischen Projektion und zeigen Sie, dass sie ein Homöomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie sowohl erklären welcher Schritt nicht korrekt ist, als auch zeigen, dass die Behauptung falsch ist.

   Behauptung. Die n-dimensionale Sphäre S^n ist zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph.

   Beweis. Nach dem ersten Teil ist $s_n \colon S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Sei $M \subset S^n$ eine abzählbar unendliche Teilmenge; wir können M so wählen, dass M genau einen Häufungspunkt besitzt und dass dieser Häufungspunkt nicht N ist. Dann ist insbesondere die Einschränkung $s_n|_{S^n \setminus (\{N\} \cup M)} \colon S^n \setminus (\{N\} \cup M) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus s_n(M)$ ein Homöomorphismus (bezüglich den jeweiligen Teilraumtopologien). Da M abzählbar unendlich ist und genau einen Häufungspunkt besitzt (der nicht N ist), gibt es eine Bijektion $f \colon \{N\} \cup M \longrightarrow s_n(M)$, die ein Homöomorphismus (jeweils bezüglich der Teilraumtopologie) ist. Damit ist auch die verklebte Abbildung

   $$\begin{aligned} S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \{N\} \cup M \\ s_n(x) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

   ein Homöomorphismus. □

Bonusaufgabe (Schleifen in höheren Sphären)**.** Zeigen Sie, dass alle Schleifen in höheren Sphären homotopietheoretisch langweilig sind: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass alle punktierten stetigen Abbildungen $(S^1, (1, 0)) \longrightarrow (S^n, (1, 0, \dots, 0))$ punktiert nullhomotop sind.

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall, dass die Schleife *nicht* surjektiv ist. Zeigen Sie dann, dass jede Schleife zu einer Schleife homotop ist, die nicht surjektiv ist …

Abgabe bis zum 26. April 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen