Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 10 vom 21. Juni 2013

Aufgabe 1 (Kofaserungen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist X ein topologischer Raum und ist $A \subset X$ ein dichter Teilraum (d.h. $\overline{A} = X$), so ist die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung.
2. Jede punktierte Kofaserung ist eine Kofaserung.

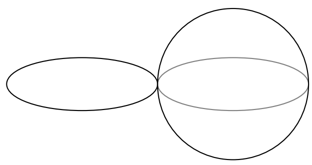
Aufgabe 2 (Kofaserungen von Sphären und Bällen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mindestens eine der folgenden Aussagen:

1. Die Inklusion $\{e_1^n\} \hookrightarrow S^n$ ist eine Kofaserung.
2. Die Inklusion $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ ist eine Kofaserung.
3. Die Inklusion $(S^n, e_1^n) \hookrightarrow (D^{n+1}, e_1^n)$ ist eine punktierte Kofaserung.
4. Die Inklusion $\{e_1^n\} \hookrightarrow D^{n+1}$ ist eine Kofaserung.

Aufgabe 3 (Quotienten nach kontraktiblen Teilräumen)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subset X$ ein Teilraum und sei $i\colon A \longrightarrow X$ die Inklusion.

1. Zeigen Sie: Ist A kontraktibel und ist i eine Kofaserung, so ist die Projektion $X \longrightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz.
2. Gilt dies auch, wenn i keine Kofaserung ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. *Bonusaufgabe.* Formulieren Sie das Resultat aus dem ersten Teil mithilfe eines Pushouts in einer geeigneten Kategorie (und begründen Sie Ihre Antwort).
4. *Bonusaufgabe.* Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt (!)

$$\pi_n\bigl((S^1, 1) \vee (S^2, e_1^2)\bigr) \cong \pi_n\biggl(\bigvee_{\mathbb{Z}} (S^2, e_1^2)\biggr).$$



Können Sie dies mit dem Kofasertransport in Verbindung setzen?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Fasertransport und Holonomie)**.** Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Faserung. Zu $b \in B$ schreiben wir

$$F_b := p^{-1}(b) \subset E$$

für die Faser von p über b.

1. Definieren Sie für jeden stetigen Weg $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow B$ derart ein Element von $[F_{\alpha(0)}, F_{\alpha(1)})]$, dass diese Konstruktion mit Verkettung von Wegen verträglich ist und zu jedem $b \in B$ eine Rechtsoperation von $\pi_1(B,b)$ auf $[F_b, F_b]$ liefert (sog. *Holonomieoperation*).

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die Konstruktion angeben, dann erklären, welche Schritte man zeigen müsste, und einen dieser Schritte im Detail ausführen. Illustrieren Sie dies durch geeignete Skizzen!

2. Folgern Sie: Ist $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow B$ ein stetiger Weg, so sind die Fasern $F_{\alpha(0)}$ und $F_{\alpha(1)}$ homotopieäquivalent.

Bonusaufgabe (reelle Divisionsalgebren)**.** Lesen Sie in der Literatur nach, was reelle Divisionsalgebren mit Faserungen von Sphären über Sphären, deren Fasern Sphären sind, zu tun haben und geben Sie einen kurzen, groben Überblick über diese Ergebnisse.

Abgabe bis zum 28. Juni 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen