Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh Blatt 11 vom 28. Juni 2013

Hinweis. Sie dürfen auf diesem Blatt verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ die Homotopiegruppe $\pi_k(S^n, e_1^n)$ trivial ist.

Aufgabe 1 (exakte Sequenzen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ und $C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$ exakte Sequenzen von Gruppen, so ist auch $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$ eine exakte Sequenz von Gruppen.
2. Ist $1 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 1$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, so ist $B \cong A \oplus C$.

Aufgabe 2 (komplex-projektive Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Fassen wir $S^{2\cdot n+1}$ als Einheitssphäre in $\mathbb{C}^{n+1}$ und S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, so erhalten wir eine stetige Operation $S^1 \curvearrowright S^{2\cdot n+1}$. Der Quotient

$$\mathbb{C}P^n := S^1 \setminus S^{2\cdot n+1}$$

heißt *n-dimensionaler komplex-projektiver Raum.*

1. Zeigen Sie, dass die Projektion $(S^{2\cdot n+1}, e^{2\cdot n+1}) \longrightarrow (\mathbb{C}P^n, [e_1^{2\cdot n+1}])$ eine punktierte (Serre-)Faserung ist.
2. Bestimmen Sie $\pi_k(\mathbb{C}P^n, [e_1^{2\cdot n+1}])$ für alle $k \in \{0, \dots, 2\cdot n\}$.
3. *Bonusaufgabe.* Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so induziert die Inklusion $S^{2\cdot n+1} \hookrightarrow S^{2\cdot(n+1)+1}$ eine stetige Abbildung $\mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$. Sei

$$\mathbb{C}P^\infty := \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{C}P^n$$

   der Kolimes bezüglich diesen Abbildungen. Bestimmen Sie die Homotopiegruppen von $\mathbb{C}P^\infty$ (bezüglich dem durch $[e_1^3]$ induzierten Basispunkt).

Aufgabe 3 (spezielle orthogonale Gruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und sei E_n die reelle $n \times n$-Einheitsmatrix.

1. Zeigen Sie, dass es eine punktierte (Serre-)Faserung

$$\big(\mathrm{SO}(n), E_n\big) \longrightarrow \big(S^{n-1}, e_1^{n-1}\big)$$

   gibt, deren Faser zu $(\mathrm{SO}(n-1), E_{n-1})$ punktiert homöomorph ist.
2. Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathrm{SO}(3), E_3)$ von

$$\begin{aligned}(S^1, 1) &\longrightarrow \big(\mathrm{SO}(3), E_3\big)\\ [t] &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\cdot\pi\cdot t) & -\sin(2\cdot\pi\cdot t) \\ 0 & \sin(2\cdot\pi\cdot t) & \cos(2\cdot\pi\cdot t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   erzeugt wird und dass es für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\big(\mathrm{SO}(n), E_n\big) \cong \pi_1\big(\mathrm{SO}(3), E_3\big)$$

   gibt.
3. *Bonusaufgabe.* Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathrm{SO}(3), E_3)$ zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist und erklären Sie den Zusammenhang mit dem Diracschen Gürteltrick (s. z.B. http://vimeo.com/62228139).

Bitte wenden

ich zweimal und lerne etwas über SO(3)! Verdrill mich zweimal und lerne etwas über SO(3)! Verdrill mich zweimal und lerne etwas über SO(3)! Verdrill mich zweimal und lerne etwas über SO

Aufgabe 4 (relative Homotopiegruppen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Zeigen Sie, dass es eine (natürliche) Bijektion zwischen der Menge

   $$\big[(D^n, S^{n-1}, e_1^{n-1}), \;\cdot\;\big]^2_*$$

   der punktierten relativen Homotopieklassen und $\pi_n(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ gibt.

   Hinweis. Verwenden Sie eine geeignete Variante des Exponentialgesetzes. Es genügt, wenn Sie die geometrische Idee skizzieren, wenn Sie erklären, in welchen Schritten man grob vorgehen muss und einen dieser Schritte etwas genauer ausführen.

2. *Bonusaufgabe.* Wie kann man die Gruppenstruktur auf $\pi_n(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ für $n \geq 2$ durch Homotopieklassen von Abbildungen von $(D^n, S^{n-1}, e_1^{n-1})$ ausdrücken?

3. Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subset X$ ein Teilraum und sei $x_0 \in A$. Wie sehen die Abbildungen

   $$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$
   $$\pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$$

   aus der langen exakten Paarsequenz von (X, A, x_0) in der Beschreibung der relativen Homotopiegruppe $\pi_n(X, A, x_0)$ aus dem ersten Teil aus?

Bonusaufgabe (Modellkategorien)**.** Schlagen Sie in der Literatur den Begriff der Modellkategorie nach, geben Sie die Definition wieder und vergleichen Sie die Axiome mit den bisher behandelten Eigenschaften von (Ko)Faserungen.

Abgabe bis zum 5. Juli 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen