Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 5. Juli 2013

Aufgabe 1 (Homotopie(ko)faser)**.** Sei $f\colon (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ eine punktierte stetige Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Dann ist $F(f) \simeq C(f)$.
2. Dann ist $C(f)$ kontraktibel.

Aufgabe 2 (Homotopiegruppen von Sphären)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie: Aus $\pi_n(S^n, e_1^n) \cong \mathbb{Z}$ folgt, dass die Klasse $[\mathrm{id}_{S^n}]_*$ ein Erzeuger von $\pi_n(S^n, e_1^n)$ ist.
2. Welche Abbildung $\pi_2(S^2, e_1^2) \longrightarrow \pi_2(S^2, e_1^2)$ induziert die Abbildung
$$\begin{aligned}(S^1,1)\wedge(S^1,1) &\longrightarrow (S^1,1)\wedge(S^1,1)\\ x\wedge y &\longmapsto y\wedge x\end{aligned}$$
unter der kanonischen Identifikation $(S^2, e_1^2) \cong_{\mathsf{Top}_*} (S^1,1)\wedge(S^1,1)$?
3. *Bonusaufgabe.* Verallgemeinern Sie das Resultat aus dem zweiten Aufgabenteil geeignet auf höherdimensionale Sphären.

Aufgabe 3 (Homotopiegruppen von Kofasern)**.**

1. Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subset X$ nicht-leer, die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X$ sei eine Kofaserung und sei $p\colon X \longrightarrow X/A$ die Projektion. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und für alle $x_0 \in A$ gelte
$$\begin{aligned}\forall_{k\in\{0,\dots,n-1\}}\quad \pi_k(A,x_0) &\cong 0\\ \forall_{k\in\{0,\dots,n\}}\quad \pi_k(X,x_0) &\cong 0.\end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass es dann für alle $x_0 \in A$ eine exakte Sequenz der folgenden Form gibt:
$$\pi_{2\cdot n-1}(A,x_0) \stackrel{\pi_{2\cdot n-1}(i)}{\longrightarrow} \pi_{2\cdot n-1}(X,x_0) \stackrel{\pi_{2\cdot n-1}(p)}{\longrightarrow} \pi_{2\cdot n-1}\bigl(X/A,[x_0]\bigr) \longrightarrow \pi_{2\cdot n-2}(A,x_0) \longrightarrow \dots \pi_{n+1}\bigl(X/A,[x_0]\bigr) \longrightarrow \pi_n(A,x_0) \longrightarrow 0$$
2. Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, wobei der Raum Y bezüglich allen Basispunkten wohlpunktiert sei. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und für alle $x_0 \in X$ gelte:
$$\begin{aligned}\forall_{k\in\{0,\dots,n-1\}}\quad \pi_k(X,x_0) &\cong 0\\ \forall_{k\in\{0,\dots,n\}}\quad \pi_k\bigl(Y,f(x_0)\bigr) &\cong 0.\end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass es dann für alle $x_0 \in X$ eine exakte Sequenz der folgenden Form gibt:
$$\pi_{2\cdot n-1}(X,x_0) \stackrel{\pi_{2\cdot n-1}(f)}{\longrightarrow} \pi_{2\cdot n-1}\bigl(Y,f(x_0)\bigr) \stackrel{\pi_{2\cdot n-1}(j_f)}{\longrightarrow} \pi_{2\cdot n-1}\bigl(C(f,x_0)\bigr) \longrightarrow \pi_{2\cdot n-2}(X,x_0) \longrightarrow \dots \pi_{n+1}\bigl(C(f,x_0)\bigr) \longrightarrow \pi_n(X,x_0) \longrightarrow 0$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Ausschneidung für Pushouts und viele Zylinder ...)**.** Sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout in Top, wobei $A \neq \emptyset$ und $i\colon A \longrightarrow X$ eine Kofaserung sei. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit: Für alle $x_0 \in A$ ist (wobei wir die Basispunkte, bezüglich denen die Homotopiefasern gebildet werden, explizit notieren)

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \quad \pi_{k-1}\big(F(i, x_0)\big) \cong 0,$$
$$\forall_{k \in \{1,\dots,m\}} \quad \pi_{k-1}\big(F(f, x_0)\big) \cong 0.$$

Zeigen Sie: Dann ist für alle $x_0 \in X_0$ die von g und f induzierte Abbildung

$$\pi_{k-1}\big(F(i, x_0)\big) \longrightarrow \pi_{k-1}\big(F(j, f(x_0))\big)$$

für alle $k \in \{1, \dots, n+m-1\}$ bijektiv, und für $k = n+m$ surjektiv. Gehen Sie dabei mit folgender Aufdickungsstrategie vor:

1. *Bonusaufgabe.* Beweisen Sie das *Fünferlemma* für abelsche Gruppen, d.h.: Ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen und sind a, b, d, e Isomorphismen, so ist auch c ein Isomorphismus.

2. Zeigen Sie mithilfe der Paarsequenz, der Fasersequenz und dem Fünferlemma: Der Ausschneidungssatz von Blakers-Massey ist auf folgende Situation anwendbar (wobei die Abbildungen die offensichtlichen Inklusionen sind):

$$\begin{tikzcd} A \times (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & A \times [0,1) \sqcup B/(a,1) \sim f(a) \arrow[d] \\ A \times (0,1] \sqcup X/(a,0) \sim i(a) \arrow[r] & A \times [0,1] \sqcup B \sqcup X/(a,1) \sim f(a), (a,0) \sim i(a) \end{tikzcd}$$

3. Zeigen Sie mit dem zweiten Teil und dem Fünferlemma, dass Ausschneidung für das folgende Pushout in Top gilt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widetilde{i}_f"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{Z}(f) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\widetilde{Z}(f) := A \times [0,1] \sqcup B/(a,1) \sim f(a)$ der unreduzierte Abbildungszylinder von f und $\widetilde{i}_f$ ist die Inklusion in den Deckel.

4. *Bonusaufgabe.* Zeigen Sie: Ist

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "j"] \\ V \arrow[r, "P"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout in Top, ist u eine Kofaserung und ist p eine Homotopieäquivalenz, so ist auch P eine Homotopieäquivalenz.

5. Geben Sie eine geeignete Homotopieäquivalenz $\widetilde{Z}(f) \longrightarrow B$ an und schließen Sie aus dem vorigen Teil, dass Ausschneidung auch für das ursprüngliche Pushout gilt.

Bonusaufgabe (Spektren)**.** Skizzieren Sie die Definition eines Spektrums im Sinne der Homotopietheorie und die Definition von Morphismen zwischen Spektren. Was ist angenehmer an der sogenannten *stabilen Homotopiekategorie* als an der Homotopiekategorie topologischer Räume?

Abgabe bis zum 12. Juli 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen