Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 12. Juli 2013

Aufgabe 1 (Homotopiegruppen von Unterkomplexen)**.** Sei X ein CW-Komplex, sei $x_0 \in X$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die von der Inklusion $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ induzierte Abbildung
$$\pi_n(X_n, x_0) \longrightarrow \pi_n(X_{n+1}, x_0)$$
ist eine Bijektion.
2. Die von der Inklusion $X_{n+1} \longrightarrow X$ induzierte Abbildung
$$\pi_n(X_{n+1}, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$
ist eine Bijektion.

Aufgabe 2 (CW-Strukturen auf Zylindern und projektiven Räumen)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

1. Sei X ein CW-Komplex. Wie erhält man aus der CW-Struktur auf X eine CW-Struktur auf $X \times [0,1]$?
2. Geben Sie CW-Strukturen für reell-projektive, komplex-projektive Räume und für $\mathbb{C}P^\infty$ an.

Aufgabe 3 (CW-Strukturen auf Sphären)**.**

1. Seien $v, e, f \in \mathbb{N}$ mit $v - e + f = 2$. Zeigen Sie, dass es eine CW-Struktur auf S^2 gibt, die v Zellen der Dimension 0, und e Zellen der Dimension 1, sowie f Zellen der Dimension 2 besitzt.
2. *Bonusaufgabe.* Was hat die Eulersche Polyederformel mit CW-Strukturen zu tun?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der 0-Zellen und der Anzahl der 1-Zellen von CW-Strukturen auf S^1 ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Isomorphismen auf Homotopiegruppen und Würfelprobleme)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subset X$ und sei $i\colon A \longrightarrow X$ die Inklusion. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind (wobei $I := [0,1]$ das Einheitsintervall ist):

1. Für alle $x_0 \in A$ gilt: Die von i induzierte Abbildung
$$\pi_k(i)\colon \pi_k(A, x_0) \longrightarrow \pi_k(X, x_0)$$
ist
   - für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ bijektiv und
   - für $k = n$ surjektiv.
2. Für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt: Für alle $\gamma \in \operatorname{map}(I^k, X)$ mit $\gamma(\partial(I^k)) \subset A$ gibt es eine Homotopie $h\colon I^k \times I \longrightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:
$$\begin{aligned} &h(\,\cdot\,, 0) = \gamma, \\ &h(\,\cdot\,, 1)\colon I^k \longrightarrow A, \\ &h\bigl(\partial(I^k) \times I\bigr) \subset A. \end{aligned}$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es einen kanonischen Homöomorphismus
$$I^k/\partial(I^k) \cong S^k.$$
Versuchen Sie, die eigentlich nötigen Randbedingungen für Homotopien aus den obigen Randbedingungen zu erhalten, indem Sie den Würfel $I^k \times I$ geeignet auf sich selbst abbilden ...

Bonusaufgabe (Produkte von CW-Komplexen)**.** Seien X und Y zwei CW-Komplexe. Ist dann $X \times Y$ bezüglich der Filtrierung
$$\Bigl(\bigcup_{j \in \{0, \dots, n\}} X_j \times Y_{n-j} \Bigr)_{n \in \mathbb{N}}$$
ein CW-Komplex? Begründen Sie Ihre Antwort!