Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 26. April 2013

Aufgabe 1 (Isomorphismen und darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie, seien X und Y Objekte in C und sei $f \in \operatorname{Mor}_C(X,Y)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $\operatorname{Mor}_C(Z,f)\colon \operatorname{Mor}_C(Z,X) \longrightarrow \operatorname{Mor}_C(Z,Y)$ für alle $Z \in \operatorname{Ob}(C)$ eine Bijektion, so ist f ein Isomorphismus in C.
2. Sind sowohl die Abbildungen $\operatorname{Mor}_C(Z,f)\colon \operatorname{Mor}_C(Z,X) \longrightarrow \operatorname{Mor}_C(Z,Y)$ als auch $\operatorname{Mor}_C(f,Z)\colon \operatorname{Mor}_C(Y,Z) \longrightarrow \operatorname{Mor}_C(X,Z)$ für alle $Z \in \operatorname{Ob}(C)$ injektiv, so ist f ein Isomorphismus in C.

Aufgabe 2 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Die *von p auf Y induzierte Quotiententopologie* ist durch

$$\bigl\{U \subset Y \bigm| p^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\bigr\} \subset P(Y)$$

definiert.

1. Zeigen Sie, dass die von p auf Y induzierte Quotiententopologie tatsächlich eine Topologie auf Y ist und dass $p\colon X \longrightarrow Y$ bezüglich dieser Topologie stetig ist.
2. Zeigen Sie: Ist Z ein topologischer Raum und $g\colon Y \longrightarrow Z$ eine Abbildung, so ist g genau dann bezüglich der Quotiententopologie auf Y stetig, wenn $g \circ p$ stetig ist.
3. Sind Quotienten von hausdorffschen Räumen immer hausdorffsch? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Sind Quotienten von kompakten Räumen immer kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Invarianz der Dimension)**.**

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie sowohl erklären welcher Schritt nicht korrekt ist, als auch zeigen, dass die Behauptung falsch ist.

   Behauptung. Seien $n,m \in \mathbb{N}_{>0}$. Gilt $(\mathbb{R}^n,0) \simeq_* (\mathbb{R}^m,0)$, so folgt bereits $n = m$.

   Beweis. Sei $f\colon (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m,0)$ eine punktierte Homotopieäquivalenz und sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann induziert f eine punktierte Homotopieäquivalenz $\bigl(\mathbb{R}^n \setminus \{x\},0\bigr) \longrightarrow \bigl(\mathbb{R}^m \setminus \{f(x)\},0\bigr)$.
   Wegen $(S^n,e_1^n) \simeq_* (\mathbb{R}^n \setminus \{x\},0)$ und $(S^m,e_1^m) \simeq_* (\mathbb{R}^m \setminus \{f(x)\},0)$ folgt somit $(S^n,e_1^n) \simeq_* (S^m,e_1^m)$. Die Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren liefert nun $n = m$. □

2. Zeigen Sie mithilfe des Satzes über die Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren: Für alle $n,m \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $\mathbb{R}^n \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist.

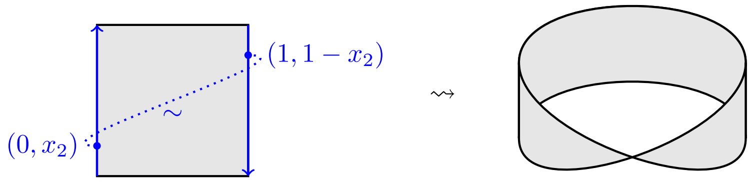
Bitte „wenden“

Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!⟶ Verkleb mich!

Aufgabe 4 (Möbiusband und Invarianz des Randes)**.** Das *Möbiusband* ist der Quotientenraum

$$M := [0,1] \times [0,1]/\sim,$$

wobei $[0,1] \times [0,1]$ die Produkttopologie trägt und die Äquivalenzrelation „$\sim$“ wie folgt definiert ist: Für alle $x, y \in [0,1] \times [0,1]$ gilt genau dann $x \sim y$, wenn $x = y$ ist oder die Bedingungen $x_1 \in \{0,1\}$, $y_1 = 1 - x_1$ und $y_2 = 1 - x_2$ erfüllt sind.



Dabei versehen wir M mit der Quotiententopologie, die von der kanonischen Projektion $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]/\sim$ induziert wird (s. Aufgabe 2).

1. Zeigen Sie zunächst die *Invarianz des Randes* mithilfe des Satzes über die Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren: Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ der „obere“ Halbraum (versehen mit der Teilraumtopologie). Dann gibt es keine offene Umgebung von 0 in H^n, die zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

   Hinweis. Zeigen Sie als ersten Schritt: Ist $U \subset H^n$ eine offene Umgebung von 0 in H^n und ist $x \in U \setminus \{0\}$, so gilt $(U, x) \simeq_* (U \setminus \{0\}, x)$. Verfahren Sie nun ähnlich wie in Aufgabe 3.

2. Folgern Sie, dass das Möbiusband *nicht* zum gewöhnlichen Band $S^1 \times [0,1]$ (mit der Produkttopologie) homöomorph ist.

Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils mit geeigneten Bildern!

Bonusaufgabe (Galoistheorie)**.** Geben Sie eine Formulierung des Hauptsatzes der Galoistheorie als Isomorphismus zwischen geeigneten Kategorien; geben Sie dabei auch eine Definition für Isomorphismen zwischen Kategorien und beweisen Sie Ihre Version des Hauptsatzes der Galoistheorie aus dem klassischen Hauptsatz der Galoistheorie.

Abgabe bis zum 3. Mai 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen