Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 10. Mai 2013

Aufgabe 1 (Sphären und π_n)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Man kann den Satz von Seifert und van Kampen auf die Zerlegung

   $$S^1 = \bigl\{x \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \bigm| x_2 \neq 1\bigr\} \cup \bigl\{x \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \bigm| x_2 \neq -1\bigr\}$$

   anwenden und daraus folgern, dass $\pi_1(S^1, 1)$ als Pushout zweier trivialer Gruppen (über einer weiteren Gruppe) die triviale Gruppe ist.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $\pi_n(S^n, e_1^n)$ einelementig ist, so ist $\pi_n(X, x_0)$ für alle punktierten topologischen Räume (X, x_0) einelementig.

Aufgabe 2 (Fundamentalgruppe und Basiswechsel)**.** Sei X ein topologischer Raum, seien $x, y \in X$ und es gebe Wege $\eta, \eta' \colon [0,1] \longrightarrow X$ in X von x nach y.

1. Zeigen Sie, dass

   $$\begin{aligned} \varphi_\eta \colon \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\gamma]_* &\longmapsto \left[[t] \mapsto \begin{cases} \eta(3 \cdot t) & \text{falls } t \in [0, 1/3] \\ \gamma([3 \cdot t - 1]) & \text{falls } t \in [1/3, 2/3] \\ \eta(3 - 3 \cdot t) & \text{falls } t \in [2/3, 1] \end{cases} \right]_* \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte Abbildung ist, die ein Gruppenisomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass $c_h \circ \varphi_\eta = \varphi_{\eta'}$ gilt, wobei $c_h \colon \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ die Konjugation mit dem Element $h \in \pi_1(X, x)$ ist, das durch die folgende Schleife gegeben ist:

   $$\begin{aligned} (S^1, 1) &\longrightarrow (S^1, 1) \\ [t] &\longmapsto \begin{cases} \eta'([2 \cdot t]) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ \eta([2 - 2 \cdot t]) & \text{falls } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Es genügt, wenn Sie angeben, was alles zu überprüfen ist und nur die wesentlichen Schritte im Detail ausarbeiten.

Aufgabe 3 (Lebesgue-Lemma)**.** Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $x \in X$ gibt es ein $i \in I$ mit $U(x, \varepsilon) \subset U_i$.
Hinweis. Betrachten Sie zu $i \in I$ die Funktion $d(\,\cdot\,, X \setminus U_i) \colon X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die den Abstand zu $X \setminus U_i$ misst.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (freies (amalgamiertes) Produkt)**.** Lesen Sie Anhang B.1 des Kurzskripts zur Vorlesung und beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Ist $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, so ist die Menge $\bigstar_{i\in I} G_i$ der reduzierten Wörter zusammen mit der in Anhang B.1 definierten Verknüpfung reduzierter Wörter eine Gruppe.

2. Ist $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, so ist das freie Produkt $\bigstar_{i\in I} G_i$ (zusammen mit den kanonischen Inklusionen) das Koprodukt der Familie $(G_i)_{i\in I}$ in der Kategorie Group.

3. Sind G_0, G_1 und G_2 Gruppen und sind $i_0\colon G_0 \longrightarrow G_1$ bzw. $i_2\colon G_0 \longrightarrow G_2$ Gruppenhomomorphismen, so ist

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\ G_2 \arrow[r, "j_2"'] & G \end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie Group. Dabei sei

$$G := (G_1 * G_2)/N,$$

wobei $N \subset G_1 * G_2$ der (bezüglich Inklusion) kleinste Normalteiler in $G_1 * G_2$ ist, der die Menge $\{i_1(g)\cdot i_2(g)^{-1} \mid g \in G_0\}$ enthält, und $j_1\colon G_1 \longrightarrow G$ bzw. $j_2\colon G_1 \longrightarrow G$ die von den kanonischen Inklusionen $G_1 \longrightarrow G_1 * G_2$ bzw. $G_2 \longrightarrow G_1 * G_2$ induzierten Homomorphismen sind.

Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie sich in den ersten beiden Teilaufgaben auf den Fall von zwei Faktoren beschränken, um die Notation übersichtlich zu halten.

Bonusaufgabe (Der Fundamentalsatz der Algebra)**.** Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra (d.h., dass jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat) mithilfe der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ n &\longmapsto \bigl[(S^1,1) \to (S^1,1), z \mapsto z^n\bigr]_* \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist (wobei wir S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen).
Hinweis. Zeigen Sie, dass die Vergiss-Abbildung $[(S^1,1),(S^1,1)]_* \longrightarrow [S^1,S^1]$ eine Bijektion ist (indem Sie die Gruppenstruktur auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ nutzen).

Zeigen Sie dann, dass ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ von nicht-trivialem Grad, das in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen besitzt, eine Abbildung $S^1 \longrightarrow S^1$ liefert, die sowohl nullhomotop als auch homotop zu der Abbildung $S^1 \to S^1, z \mapsto z^{\deg p}$ ist …

Abgabe bis zum 17. Mai 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen