Übungen zur Algel

Prof. Dr. C. Löh

Aufgabe 1 (geometrische Dimensio
sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G. W
Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antw

1. Ist $\operatorname{geomdim} G = 0$, so ist G triv
2. Ist $\operatorname{geomdim} G = 1$, so ist G ein
3. Ist $\operatorname{geomdim} H < \operatorname{geomdim} G$?
4. Ist $\operatorname{geomdim} H \leq \operatorname{geomdim} G$?

Hinweis. Sie dürfen verwenden
Komplex eine universelle Überla
lagerungen von CW-Komplexen

Aufgabe 2 (Yoneda-Lemma).

1. Wie lautet das Yoneda-Lemma?
2. Wie beweist man das Yoneda-L
3. Was hat das Yoneda-Lemma mi

Aufgabe 3 (Klassifizierende Räume
Konstruieren Sie einen Eilenberg-Ma

braischen Topologie I

Blatt 14 vom 19. Juli 2013

von Gruppen). Sei G eine Gruppe und
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
ort.

ial.

freie Gruppe.

dass jeder wegzusammenhängende CW-
gerung besitzt. Wie kann man auf Über-
eine CW-Struktur definieren?

mma?

dem Satz von Whitehead zu tun?

diskreter) Gruppen). Sei G eine Gruppe.
Lane-Raum vom Typ $K(G,1)$.

Hinweis. Gehen Sie wie im höherdime
abelsche Gruppen durch freie Gruppe
gruppen von Kofasern in niedrigen Gra
Kampen.

Aufgabe 4 (Kohomologie, homotopiet
sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei X ein Eilenberg-M

1. Zeigen Sie, dass der kontravarian

$$H^n(\,\cdot\,;A) := [$$

über den Vergissfunktor $\mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{S}$

2. Welche Verbindung können Sie
zwischen $H^{n+1}(\,\cdot\,;A)$ und $H^n(\,\cdot$

Hinweis. Die *unreduzierte Einhä*
durch

$$\widetilde{\Sigma} X :=$$

definiert, wobei „$\sim$“ von

$$\forall_{x,x' \in X} \quad (x,0) \sim (x',0)$$

erzeugt wird. Setzen Sie punktie
ten Raumes zusammen mit einem
tierte Homotopieklassen des ursp
dürfen verwenden, dass $\Omega(Y,y_0)$
CW-Komplexes hat, wenn (Y,y_0)

Bonusaufgabe (Skript). Finden Sie m

sionalen Fall vor und ersetzen Sie freie
und die Berechnung von Homotopie-
den durch den Satz von Seifert und van

eoretisch). Sei A eine abelsche Gruppe,
acLane-Raum vom Typ $K(A,n)$.

e Funktor

$$\cdot\,, X] \colon \mathsf{Top}_\mathrm{h} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

et faktorisiert.

mithilfe der unreduzierten Einhängung
$A)$ herstellen?

gung eines topologischen Raumes X ist

$$X \times [0,1]/\sim$$

$$\text{und} \quad \forall_{x,x' \in X} \quad (x,1) \sim (x',1)$$

te Homotopieklassen eines unpunktier-
hinzugefügten Basispunkt und unpunk-
rünglichen Raumes in Verbindung. Sie
den Homotopietyp eines (punktierten)
ein punktierter CW-Komplex ist.

öglichst viele Fehler im Skript!

Bitte wenden

e). Lesen Sie Kapitel 14.1–14.4 in *Alge-*
opean Mathematical Society, 2008) und

ion von eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorbün-

n reellen Vektorbündeln homotopietheo-

altigkeiten und Chirurgie). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$
ppe. Zeigen Sie, dass es eine kompakte
, deren Fundamentalgruppe zu G iso-
r:

, wann eine Gruppe *endlich präsentiert*

ch, wie die zusammenhängende Sum-
efiniert ist.

ann mit $(S^1 \times S^{n-1})\#\dots\#(S^1 \times S^{n-1})$
Seifert und van Kampen, um die Fun-
ltigkeiten zu berechnen).

" an (sogenannte „Chirurgie"), um die
odifizieren. Warum benötigen Sie dabei,
ist?

---

e Abgabe
olsame Semester„ferien"!

Bonusaufgabe (klassifizierende Räum
braic Topology von T. tom Dieck (Eur
beantworten Sie folgende Fragen:

1. Was hat $\mathbb{C}P^\infty$ mit der Klassifikat
   deln zu tun?
2. Wie kann man Orientierbarkeit vo
   retisch formulieren?

Bonusaufgabe (Gruppen via Mannigf
und sei G eine endlich präsentierte Gr
Mannigfaltigkeit der Dimension n gib
morph ist. Gehen Sie dabei wie folgt vo

1. Schlagen Sie in der Literatur nac
   heißt.
2. Schlagen Sie in der Literatur n
   me „#" von Mannigfaltigkeiten d
3. Beginnen Sie Ihre Konstruktion d
   (und verwenden Sie den Satz vo
   damentalgruppe solcher Mannigfa
4. Kleben Sie nun geeignete „Henke
   Fundamentalgruppe geeignet zu m
   dass die Dimension mindestens 4

---

freiwillig
Wir wünschen Ihnen erh

ne diskreter Gruppen). Sei G eine Grup-
nder CW-Komplex. Zeigen Sie, dass die

MacLane-Raum vom Typ $K(G,1)$.

ist zu G isomorph und die universelle
tibel.

jeder wegzusammenhängende CW-Kom-
sitzt. Wie kann man auf der universellen
definieren?

Konstruieren Sie explizite Modelle für Ei-
$(\,\cdot\,,1)$

berggruppe

$$x,y,z \in \mathbb{Z}\Bigg\} \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}).$$

tlich diskontinuierliche Operation dieser

Bonusaufgabe (klassifizierende Räu
pe und sei X ein wegzusammenhäng
folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Raum X ist ein Eilenberg-M
2. Die Fundamentalgruppe von X
   Überlagerung von X ist kontrak

Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass
plex eine universelle Überlagerung be
Überlagerung auch eine CW-Struktur

Bonusaufgabe (explizite Modelle).
lenberg-MacLane-Räume vom Typ K

1. für die Gruppe $\mathbb{Z}/3$, und
2. für die *dreidimensionale Heisen*

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|$$

Hinweis. Geben Sie eine eigen
Gruppe auf $\mathbb{R}^3$ an ...