Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt -1 vom 16. Oktober 2013

Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 1 (Stetige Abbildungen und topologische Eigenschaften)**.** Sei P eine der folgenden Eigenschaften (von Teilmengen) topologischer Räume:

- offen
- abgeschlossen
- kompakt
- zusammenhängend
- wegzusammenhängend
- hausdorffsch

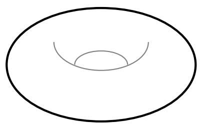
Beantworten Sie die folgenden Fragen (und begründen Sie Ihre Antwort):

1. Wie ist die Eigenschaft P definiert?
2. Seien X und Y topologische Räume, sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig, und $A \subset X$ habe die Eigenschaft P. Hat dann auch $f(A)$ die Eigenschaft P?
3. Seien X und Y topologische Räume, sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig, und $B \subset Y$ habe die Eigenschaft P. Hat dann auch $f^{-1}(B)$ die Eigenschaft P?

Aufgabe 2 (Homöomorphismen)**.** Seien X, Y topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung.

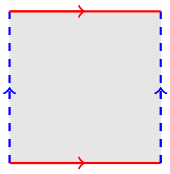
1. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass f in dieser Situation im allgemeinen kein Homöomorphismus ist.
2. Geben Sie Voraussetzungen an X und Y an, unter denen man schließen kann, dass f in dieser Situation immer ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 3 (Torus durch Verkleben)**.** Der *zweidimensionale Torus* ist



$$T := S^1 \times S^1,$$

wobei wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit der Teilraumtopologie und T mit der Produkttopologie versehen.



1. Wie kann man das Verkleben des Einheitsquadrates wie in der Skizze mithilfe der Quotiententopologie beschreiben?
2. Sei Q der Quotientenraum aus dem ersten Teil. Zeigen Sie, dass T und Q homöomorph sind.
3. Was hat das mit dem klassischen Asteroids-Spiel von Atari zu tun?
   http://www.atari.com/arcade/arcade/asteroids-online#!/arcade/asteroids/play
4. Sind T und S^1 homöomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Verklebelemma)**.** Seien X und Y topologische Räume, seien $A, B \subset X$ mit $A \cup B = X$ und seien $f\colon A \longrightarrow Y$ und $g\colon B \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen (bezüglich der Teilraumtopologie auf A bzw. B) mit $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f \cup_{A\cap B} g\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ g(x) & \text{falls } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

wohldefiniert.

1. Zeigen Sie: Sind A und B in X abgeschlossen, so ist $f \cup_{A\cap B} g$ stetig.
2. Ist $f \cup_{A\cap B} g$ auch dann stetig, wenn A und B nicht abgeschlossen sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Homöomorphismengruppen)**.** Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum gibt, dessen Homöomorphismengruppe zu G isomorph ist.
Hinweis. Ist X ein topologischer Raum, so ist die *Homöomorphismengruppe* gegeben durch die Menge der Homöomorphismen $X \longrightarrow X$ zusammen mit der durch Abbildungskomposition gegebenen Verknüpfung.

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in der Übung am 16. Oktober 2013 besprochen