Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 18. Oktober 2013

Aufgabe 1 (Isomorphismen von Raumpaaren)**.** Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Gilt $(X, A) \cong (Y, B)$, so folgt $X \cong Y$ und $A \cong B$.
2. Gilt $A \cong B$ und $X \cong Y$, so folgt $(X, A) \cong (Y, B)$.
3. Gilt $(X, A) \cong (Y, B)$, so folgt $X/A \cong Y/B$.
4. Gilt $X/A \cong Y/B$, so folgt $(X, A) \cong (Y, B)$.

Hinweis. Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$, so schreiben wir X/A für den Quotientenraum $X/\sim$ mit der Quotiententopologie, wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation

$$\bigl\{(a, b) \bigm| a, b \in A\bigr\} \cup \bigl\{(x, x) \bigm| x \in X\bigr\} \subset X \times X$$

auf X ist.

Aufgabe 2 (Produktkategorie, duale Kategorie)**.** Bearbeiten Sie wahlweise eine der folgenden Aufgaben:

1. Seien C und D Kategorien. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie die *Produktkategorie* $C \times D$ definiert ist und charakterisieren Sie Isomorphismen/isomorphe Objekte in $C \times D$.
2. Sei C eine Kategorie. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie die *duale Kategorie* C^{op} definiert ist und charakterisieren Sie Isomorphismen/isomorphe Objekte in C^{op}.

Aufgabe 3 (reell-projektive Ebene aus einfachen Bausteinen)**.** Zeigen Sie, dass es Pushoutdiagramme topologischer Räume der folgenden Form gibt:

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}P^0 \arrow[d] \\ D^1 \arrow[r] & \mathbb{R}P^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}P^1 \arrow[d] \\ D^2 \arrow[r] & \mathbb{R}P^2 \end{tikzcd}$$

Geben Sie dabei insbesondere jeweils die vier stetigen Abbildungen in den obigen Diagrammen an und illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Morphismen der Simplexkategorie)**.** Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} d_j^n \colon \Delta(n-1) &\longrightarrow \Delta(n) \\ k &\longmapsto \begin{cases} k & \text{falls } k < j \\ k+1 & \text{falls } k \geq j; \end{cases} \end{aligned}$$

zu $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0,\dots,n\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} s_j^n \colon \Delta(n+1) &\longrightarrow \Delta(n) \\ k &\longmapsto \begin{cases} k & \text{falls } k \leq j \\ k-1 & \text{falls } k > j. \end{cases} \end{aligned}$$

All diese Abbildungen sind offenbar Morphismen in der Simplexkategorie Δ.

1. Zeigen Sie: Jeder Morphismus in Δ ist eine Verknüpfung endlich vieler der obigen Morphismen.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$.
   - Zeigen Sie: Für alle $j, k \in \{0,\dots,n+1\}$ mit $j < k$ gilt
     $$d_k^{n+1} \circ d_j^n = d_j^{n+1} \circ d_{k-1}^n.$$
   - Geben Sie für $j \in \{0,\dots,n+1\}$, $k \in \{0,\dots,n\}$ eine alternative Darstellung für $s_k^n \circ d_j^{n+1}$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Bonusaufgabe (Triangulierung)**.** Ein *simplizialer Komplex* ist ein Paar (V, S), wobei V eine Menge und S eine Menge endlicher Teilmengen von V mit folgender Eigenschaft ist: Für alle $\sigma \in S$ und alle $\tau \subset \sigma$ ist auch $\tau \in S$. Man nennt dann die Elemente von V *Ecken* des simplizialen Komplexes und die Elemente von S *Simplizes* des simplizialen Komplexes.

Sei $K := (V, E)$ ein simplizialer Komplex mit einer durch „$\leq$“ total geordneten Eckenmenge V. Ist $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in S \setminus \{\emptyset\}$ mit $v_0 < v_1 < \dots < v_n$, so schreiben wir $\|\sigma\| := \Delta^n$; ist $\tau = \{v_{j_0}, \dots, v_{j_m}\} \neq \emptyset$ und $j_0 < \dots < j_m \in \{0,\dots,n\}$, so betrachten wir die lineare Abbildung $i_{\tau,\sigma} \colon \|\tau\| \longrightarrow \|\sigma\|$, die auf den Einheitsvektoren durch $e_{k+1} \longmapsto e_{j_k+1}$ für alle $k \in \{0,\dots,m\}$ gegeben ist. Dann ist die *geometrische Realisierung von K* der topologische Raum

$$\|K\| := \Bigl(\bigsqcup_{\sigma \in S \setminus \{\emptyset\}} \|\sigma\| \Bigr) \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{\sigma \in S \setminus \{\emptyset\}} \|\sigma\|$ ist, die von

$$\forall_{\sigma \in S \setminus \{\emptyset\}} \quad \forall_{\tau \subset \sigma, \tau \neq \emptyset} \quad \forall_{x \in \|\tau\|} \quad x \sim i_{\tau,\sigma}(x)$$

erzeugt wird.

Eine *Triangulierung* eines topologischen Raumes X ist ein Paar (K, f), wobei K ein simplizialer Komplex und $f \colon \|K\| \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus ist.

1. Illustrieren Sie die geometrische Realisierung am simplizialen Komplex
   $$\bigl(\{1,\dots,6\}, \emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{4,5,6\}\bigr)$$
2. Geben Sie eine Triangulierung des Möbiusbandes an.
3. Besitzt jeder topologische Raum eine Triangulierung?

Abgabe bis zum 25. Oktober, 10:00 Uhr, in den Briefkasten