Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 20. Dezember 2013

Aufgabe 1 (ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie und Verkleben)**.** Seien X und Y topologische Räume, seien $x_0 \in X$ bzw. $y_0 \in Y$ und sei

$$X - Y := X \sqcup [0,1] \sqcup Y \bigm/ (x_0 \sim 0,\ 1 \sim y_0).$$

Sei außerdem $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $\|\cdot\|_1$ auf $H_k(X - Y;\mathbb{R})$ trivial, so ist $\|\cdot\|_1$ auf $H_k(X;\mathbb{R})$ und $H_k(Y;\mathbb{R})$ trivial.
2. Ist $\|\cdot\|_1$ auf $H_k(X;\mathbb{R})$ und $H_k(Y;\mathbb{R})$ trivial, so ist $\|\cdot\|_1$ auf $H_k(X - Y;\mathbb{R})$ trivial.

Aufgabe 2 (ℓ^1-Halbnorm auf $H_0(\,\cdot\,;\mathbb{R})$)**.** Bestimmen Sie die ℓ^1-Halbnorm auf $H_0(\,\cdot\,;\mathbb{R})\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 3 (Homologie von Vervollständigungen)**.** Ein *normierter Kettenkomplex* ist ein Kettenkomplex in der Kategorie der normierten $\mathbb{R}$-Vektorräume (deren Morphismen beschränkte lineare Abbildungen im Sinne der Funktionalanalysis sind). Ist $C = ((C_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}})$ ein normierter Kettenkomplex, so definieren wir die Vervollständigung

$$\overline{C} := \bigl((\overline{C}_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\overline{\partial}_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$$

von C, indem wir die Kettenmoduln bezüglich den gegebenen Normen vervollständigen und die Randoperatoren und Normen entsprechend fortsetzen.

1. Zeigen Sie, dass $\overline{C}$ ein wohldefinierter normierter Kettenkomplex ist.
2. Sei $i\colon C \longrightarrow \overline{C}$ die von den Inklusionen induzierte Kettenabbildung und sei $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $H_k(i)\colon H_k(C) \longrightarrow H_k(\overline{C})$ im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 4 (Verfeinerung des Jordanschen Kurvensatzes)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}.

1. Zeigen Sie, dass eine der Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S$ beschränkt ist und dass eine unbeschränkt ist.

   Hinweis. Sei X ein topologischer Raum. Nullhomotope stetige Abbildungen $S^{n-1} \longrightarrow X$ können stetig auf D^n fortgesetzt werden.

2. Zeigen Sie, dass S der Rand der beiden Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S$ ist.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Slitherlink)**.** Ein Slitherlink-Puzzle besteht aus einem quadratischen Gitter, bei dem in gewissen Feldern Zahlen eingetragen sind. Das Ziel ist es nun, aus den Gitterkanten eine einfach geschlossene Schleife zu formen, die im folgenden Sinn mit den vorgegebenen Zahlen kompatibel ist:

SL 1 Benachbarte Gitterpunkte werden so durch vertikale oder horizontale Kanten verbunden, dass sich insgesamt eine geschlossene Schleife ergibt.

SL 2 Die Zahlen geben an, wieviele der Kanten des Feldes zur Schleife gehören. Bei leeren Feldern ist die Anzahl der Kanten, die zur Schleife gehören, nicht vorgegeben.

SL 3 Die Schleife hat keine Selbstüberkreuzungen und keine Abzweigungen.

1. Lösen Sie das folgende Slitherlink-Puzzle:

1				3							2
		1			3	3	3	3		3	
3	3	3	3	1					1		
			1			1		1			
	3					3			3		2
2					2	3			3		1

2. Welcher Satz aus der Topologie kann globale Lösungsstrategien für Slitherlink-Puzzles liefern? Illustrieren Sie dies an einem Beispiel!

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte bekommen.

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie so viele Tipfehler im Skript zur Vorlesung wie möglich.

Bonusaufgabe (Knoten)**.** Ein *Knoten* ist eine stetige und injektive Abbildung $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Das *Knotenkomplement* eines Knotens $K\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus K(S^1)$.

1. Ist es sinnvoll, Knoten zu studieren, indem man Knoten modulo Homotopie von Abbildungen betrachtet? Begründen Sie Ihre Antwort und schlagen Sie in der Literatur einen geeigneten Äquivalenzbegriff für Knoten nach!

2. Ist es sinnvoll, Knoten zu studieren, indem man die singuläre Homologie der Knotenkomplemente betrachtet? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (simpliziale Mengen aus Gruppen)**.**

1. Konstruieren Sie einen Funktor $B\colon \mathsf{Group} \longrightarrow \Delta(\mathsf{Set})$ mit: Für alle Gruppen G und alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$B(G)\big(\Delta(n)\big) = G^n.$$

2. Für welche Gruppen liefert Ihr Funktor nicht nur simpliziale Mengen, sondern simpliziale Gruppen (bzgl. der offensichtlichen Gruppenstruktur auf den kartesischen Produkten der Gruppe)?

Bonusaufgabe (Überlagerungen und Transfer)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine d-blättrige Überlagerung topologischer Räume mit $d \in \mathbb{N}$. Zu $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ sei
$$p^{-1}(\sigma) := \big\{\tau \in \operatorname{map}(\Delta^k, Y) \bigm| p \circ \tau = \sigma\big\} \subset \operatorname{map}(\Delta^k, Y).$$

Wir definieren nun die *Transferabbildung*
$$\begin{aligned} T_k\colon C_k(X) &\longrightarrow C_k(Y) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto \sum_{\tau \in p^{-1}(\sigma)} \tau \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und setzen $T_k := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$.

1. Zeigen Sie, dass $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C(X) \longrightarrow C(Y)$ definiert.

2. Bestimmen Sie $H_*(p; R) \circ H_*(R \otimes_{\mathbb{Z}} T)$.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine zweiblättrige Überlagerung $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Was können Sie daraus über $H_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{R})$ schließen?

Hinweis. Falls Sie Algebraische Topologie I nicht besucht haben und nicht wissen, was Überlagerungen sind, ist dies kein Problem. Sie können folgende Aussagen aus der Überlagerungstheorie verwenden: Ist $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ und $t \in \Delta^k$, so ist
$$\begin{aligned} p^{-1}(\sigma) &\longrightarrow p^{-1}\big(\sigma(t)\big) \\ \tau &\longmapsto \tau(t) \end{aligned}$$
bijektiv und $p^{-1}\big(\sigma(t)\big)$ enthält genau d Elemente.

Bonusaufgabe (ℓ^1-Homologie)**.** Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir $C^{\ell^1}(X; \mathbb{R})$ als Vervollständigung des normierten Kettenkomplexes $C(X; \mathbb{R})$ bezüglich der ℓ^1-Norm (s. Aufgabe 3) und
$$H_*^{\ell^1}(X; \mathbb{R}) := H_*\big(C^{\ell^1}(X; \mathbb{R})\big).$$

1. Erweitern Sie dies so zu einem Funktor $H_*^{\ell^1}(\,\cdot\,; \mathbb{R})\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Grad}$, dass die Inklusion des singulären Kettenkomplexes in den ℓ^1-Kettenkomplex eine natürliche Transformation $H_*(\,\cdot\,; \mathbb{R}) \Longrightarrow H_*^{\ell^1}(\,\cdot\,; \mathbb{R})$ induziert.

2. Ist $H_*^{\ell^1}(\,\cdot\,; \mathbb{R})\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Grad}$ homotopieinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Machen Sie plausibel, dass man für $H_*^{\ell^1}(\,\cdot\,; \mathbb{R})$ *keine* Mayer-Vietoris-Sequenz erwarten kann (Sie müssen dies aber nicht rigoros beweisen).

Abgabe bis zum 10. Januar 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!