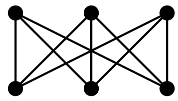
Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 31. Januar 2014

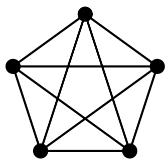
Aufgabe 1 (Unterkomplexe)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ und sei $A \subset X$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $(A \cap X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ eine CW-Struktur auf A, so ist A ein Unterkomplex von X.
2. Ist A ein Unterkomplex von X, so ist $\chi(A) \leq \chi(X)$.

Aufgabe 2 (Nicht-Planarität von K_5 und $K_{3,3}$, CW-Version)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden eindimensionalen CW-Komplexe *nicht* durch Ankleben von 2-Zellen zu CW-Strukturen auf S^2 ergänzt werden können:



$K_{3,3}$



K_5

Aufgabe 3 (Vergleichssatz für Homologietheorien auf CW-Komplexen)**.** Sei R ein Ring mit Eins, seien h und h' Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine natürliche Transformation $h \Longrightarrow h'$ von Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit der Eigenschaft, dass

$$T_k(\bullet)\colon h_k(\bullet) \longrightarrow h'_k(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist. Zeigen Sie: Dann ist

$$T_k(X,A)\colon h_k(X,A) \longrightarrow h'_k(X,A)$$

für alle endlichen CW-Paare (X,A) ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Aufgabe 4 (freie Operationen auf geradedimensionalen Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine endliche Gruppe, die frei auf $S^{2\cdot n}$ operiert. Zeigen Sie mithilfe des Lefschetzschen Fixpunktsatzes, dass G trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ ist.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Universalität der Euler-Charakteristik). Eine *additive Invariante für endliche CW-Komplexe* ist ein Paar (A, α) bestehend aus einer abelschen Gruppe A und einer „Abbildung“ $\alpha\colon \operatorname{Ob}(\mathsf{CW}_{\mathsf{fin}}) \longrightarrow A$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Homotopieinvarianz.* Sind X und Y zellulär homotopieäquivalente endliche CW-Komplexe, so gilt

$$\alpha(X) = \alpha(Y).$$

- *Additivität.* Sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout in Top, wobei A, B und X endliche CW-Komplexe sind, $i\colon A \longrightarrow X$ die Inklusion eines Unterkomplexes und $f\colon A \longrightarrow B$ zellulär ist (in diesem Fall ist auch Y ein endlicher CW-Komplex). Dann gilt

$$\alpha(Y) = \alpha(X) + \alpha(B) - \alpha(A).$$

- *Normalisierung.* Es ist $\alpha(\emptyset) = 0$.

Eine additive Invariante (A, α) für endliche CW-Komplexe ist *universell*, wenn es zu jeder additiven Invariante (B, β) für endliche CW-Komplexe einen Homomorphismus $\varphi\colon A \longrightarrow B$ abelscher Gruppen mit

$$\beta = \varphi \circ \alpha\colon \operatorname{Ob}(\mathsf{CW}_{\mathsf{fin}}) \longrightarrow B$$

gibt.

1. Zeigen Sie, dass die Euler-Charakteristik eine universelle additive Invariante für endliche CW-Komplexe ist.

2. Kann es weitere universelle additive Invarianten für endliche CW-Komplexe geben? Begründen Sie Ihre Antwort!