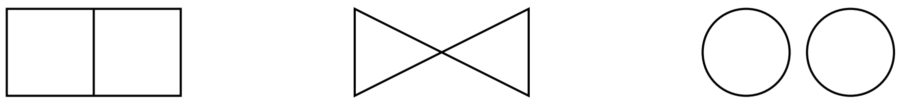
Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh Blatt 2 vom 25. Oktober 2013

Aufgabe 1 (Homotopieäquivalenzen)**.** Seien (X, A), (Y, B) Raumpaare und sei $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Raumpaaren. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Gibt es eine Homotopieäquivalenz $g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren mit $f \simeq_{A,B} g$, so ist auch f eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren.
2. Ist f eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren, so gibt es einen Homöomorphismus $g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren mit $f \simeq_{A,B} g$.

Aufgabe 2 (Homotopieäquivalenzen/Homöomorphismen)**.** Welche der folgenden drei Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind homöomorph? Welche sind homotopieäquivalent? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!



Aufgabe 3 (Abbildungskegel)**.** Seien $X \neq \emptyset$ und Y topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Der *Abbildungskegel von* f ist durch das Pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d] \\ \mathrm{Cone}(X) \arrow[r] & \mathrm{Cone}(f) \end{tikzcd}$$

definiert; dabei ist $\mathrm{Cone}(X) := X \times [0, 1]/X \times \{0\}$ der *Kegel über* X und $i\colon X \longrightarrow \mathrm{Cone}(X)$ ist die von der Inklusion $X \longrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow X \times [0, 1]$ induzierte stetige Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Cone}(X)$ kontraktibel ist.
2. Zeigen Sie: Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $\mathrm{Cone}(f)$ kontraktibel.

Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (funktorielle Simplizes – topologisch und algebraisch)**.** Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Konstruieren Sie einen Funktor $\Delta_{\mathsf{Top}} \colon \Delta \longrightarrow \mathsf{Top}$, der
$$\Delta_{\mathsf{Top}}\bigl(\Delta(n)\bigr) = \Delta^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

2. Konstruieren Sie einen Funktor $\Delta_{\mathsf{Ab}} \colon \Delta \longrightarrow \mathsf{Ab}$, der
$$\Delta_{\mathsf{Ab}}\bigl(\Delta(n)\bigr) = \mathbb{Z}^{n+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

3. Sei X ein topologischer Raum und sei $U := (U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X. Konstruieren Sie einen Funktor $\Delta_U \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Top}$, der
$$\Delta_U\bigl(\Delta(n)\bigr) = \coprod_{i \in I^{n+1}} \bigcap_{k=0}^{n} U_{i_k}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Bonusaufgabe (Monaden)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was *Monaden* im Sinne der Kategorientheorie sind.

2. Was hat die Typklasse Functor in Haskell (http://www.haskell.org) mit Funktoren im Sinne der Kategorientheorie zu tun?

   Hinweis. Betrachten Sie die Kategorie, deren Objekte Haskell-Typen und deren Morphismen Haskell-Funktionen sind ...

3. Welches Konzept in Haskell entspricht natürlichen Transformationen?

4. Was ist die Typklasse Monad in Haskell und wie hängt diese Typklasse mit Monaden im Sinne der Kategorientheorie zusammen? Vergleichen Sie dabei insbesondere die kategorientheoretischen Monadenaxiome mit den *monad laws* in Haskell.

Abgabe bis zum 4. November, 10:00 Uhr, in den Briefkasten